1. SKLOP NALOG

1. Ugotovi, ali sledeči predpisi določajo skalarni produkt na $\mathcal{C}[0,1]$.

   (a) $\langle f,g\rangle = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x)\overline{g(y)}dy$

   (b) $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$

   (c) $\langle f,g\rangle = \int_0^1 dx \int_0^x f(y)\overline{g(y)}dy$.

2. Na prostoru c_{00} vseh kompleksnih zaporedij, ki so od nekod naprej konstantno enaka 0, definirajmo naslednji skalarni produkt.

$$\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n x_n \overline{y_n}.$$

   Dokaži, da ta prostor ni poln v normi, porojeni iz skalarnega produkta.

3. Dokaži, da za kompleksna števila $z_1, \dots, z_n$ velja

$$|z_1 + \cdots + z_n|^2 \leq n(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2).$$

4. Naj bo f zvezna realna funkcija na intervalu $[0,\pi]$. Dokaži, da velja

$$\left|\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx\right|^2 \leq \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(x)^2 dx.$$

5. Naj bo V prostor s skalarnim produktom. Dokaži, da v Cauchy-Schwarzevi neenakosti velja enakost natanko takrat, ko sta vektorja linearno odvisna.

6. Dokaži, da je prostor l^2 Hilbertov prostor.

7. Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Če velja $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$, dokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira v $\mathcal{H}$.

8. Naj bo $u : X \times X \to \mathbb{F}$ semi-skalaren produkt na X in naj bo

$$N = \{x \in X : \ u(x,x) = 0\}.$$

   (a) Dokaži, da je N linearen podprostor v X.

   (b) Za poljubna vektorja $x+N, y+N \in X/N$ definiramo

$$\langle x+N, y+N\rangle := u(x,y).$$

   Dokaži, da je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dobro definiran skalarni produkt na X/N.

9. Naj bo X realen vektorski prostor s semi-skalarnim produktom u. Če za vsak $x \in X$ obstaja tak $y \in X$, da je $u(x,y) \neq 0$, dokaži, da je u skalarni produkt na X.

10. Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Dokaži naslednjo enakost

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|x + e^{it}y\|^2 e^{it} dt.$$

11. Naj bo f analitična funkcija na okolici zaprte krogle $\overline{B}(a;r)$. Dokaži, da velja

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int\int_{B(a;r)} f.$$

12. Naj bo G odprta množica v $\mathbb{C}$, $a \in G$ in $f \in L^2_a(G)$. Če velja $0 < r < \operatorname{dist}(a, \partial G)$, dokaži, da velja

$$|f(a)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f\|_2.$$

13. Določi vse funkcije v $L^2_a(\mathbb{C})$.