2. SKLOP NALOG

1. Naj bo X množica vseh zveznih realnih funkcij na intervalu $[0,1]$ z lastnostjo
$$\int_0^1 \frac{f(t)^2}{t} dt < \infty.$$
Za vsak f in g iz X postavimo $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \frac{f(t)g(t)}{t} dt$.
   (a) Pokaži, da je s tem definiran skalarni produkt v realnem vektorskem prostoru X.
   (b) Ali je X realen Hilbertov prostor?

2. Določi ortogonalen komplement naslednjih podmnožic Hilbertovega prostora l^2:
   (a) $\{e_n - e_{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\}$,
   (b) $\{e_{2n-1} + e_{2n} : \ n \in \mathbb{N}\}$.

3. Naj bosta M in N zaprta podprostora Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$. Dokaži:
   (a) $(M^\perp + N^\perp)^\perp = (M \cap N)$,
   (b) $(M \cap N)^\perp = \overline{M^\perp + N^\perp}$.

4. Dokaži: elementa x in y v prostoru s skalarnim produktom sta ortogonalna natanko tedaj, ko za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ velja $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

5. Dokaži, da v Hilbertovem prostoru velja $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ natanko takrat, ko sta x in y kolinearna in velja $\langle x, y\rangle \geq 0$.

6. Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in $x, y \in \mathcal{H}$ linearno neodvisna enotska vektorja. Pokaži, da potem velja $\|tx + (1-t)y\| < 1$ za $0 < t < 1$. Kaj nam to pove o zaprti enotski krogli prostora $\mathcal{H}$?

7. Naj bo $N \geq 1$. Definirajmo preslikavo $L : l^2 \to \mathbb{C}$ s predpisom $L(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = a_N$. Dokaži, da je L omejen linearen funkcional in določi tak vektor $a_0 \in l^2$, da bo velja $L(a) = \langle a, a_0\rangle$ za vse $a \in l^2$.

8. Naj bo $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N}_0)$.
   (a) Pokaži: če je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$, potem ima potenčna vrsta $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ konvergenčni radij ≥ 1.
   (b) Če je $|\lambda| < 1$ in $L : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definiran s predpisom $L((\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^\infty a_n \lambda^n$, poišči tak vektor a_0, da bo veljalo $L(a) = \langle a, a_0\rangle$ za vse $a \in \mathcal{H}$.
   (c) Kolikšna je norma funkcionala L?
   (d) Za $L(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n=1}^\infty n a_n \lambda^{n-1}$ $(|\lambda| < 1)$ določi a_0 tako, da bo veljalo $L(a) = \langle a, a_0\rangle$ za vse $a \in \mathcal{H}$.

9. Določi realne koeficiente a, b, c tako, da bo izraz
$$\int_{-1}^1 \left(x^3 - (ax^2 + bx + c)\right)^2 dx$$
zavzel najmanjšo vrednost. Nalogo reši s pomočjo skalarnega produkta.