3. SKLOP NALOG

1. Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in f neničelni zvezni funkcional na $\mathcal{H}$. Dokaži, da obstaja natanko en vektor $u \in \mathcal{H}$, za katerega velja naslednje:

   (a) $f(u) = 1$,

   (b) $\langle x, u \rangle = 0$ za vse $x \in \mathcal{H}$, za katere je $f(x) = 0$.

2. Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in $x \in \mathcal{H}$. Naj bo dano zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, za katerega velja

   (a) $\|x_n\| \leq \|x\|$ za vse $n \in \mathbb{N}$,

   (b) $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, x\rangle = \|x\|^2$.

   Dokaži, da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ali lahko (a) izpustimo?

3. Vektorski prostor realnih polinomov $\mathbb{R}[X]$ opremimo s skalarnim produktom

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

   S pomočjo Gramm-Schmidtovega postopka ortonormiraj množico $\{1, x, x^2\}$.

4. Naj bo $\mathcal{H}$ neskončno razsežen Hilbertov prostor.

   (a) Dokaži, da ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}$ ni nikoli Hamelova baza.

   (b) Dokaži, da je Hamelova baza prostora $\mathcal{H}$ neštevna.

   (c) Določi kardinalnost Hamelove baze prostora l^2.

5. Prostor c_{00} vseh kompleksnih zaporedij, ki so od nekod naprej ničelna, opremimo z naslednjo normo.

$$\|(x_1, x_2, \ldots)\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

   Dokaži, da je $(c_{00}, \|\cdot\|)$ normiran prostor, ki ni Banachov. Dokaži, da je preslikava $f : c_{00} \to \mathbb{C}$, definirana s predpisom

$$f(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} n x_n$$

   dobro definiran nezvezen linearen funkcional na c_{00}.

6. Poišči primer nezveznega linearnega funkcionala na l^2.

7. S pomočjo Besselove neenakosti dokaži

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{6}.$$