Fourth exercise sheet

1. Naj bo $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearna preslikava na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Dokaži, da je V izometrija natanko takrat, ko za poljubna vektorja $f, g \in \mathcal{H}$ velja
$$\langle Vf, Vg\rangle = \langle f, g\rangle.$$

2. Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor s števno neskončno ortonormirano bazo. Dokaži, da je $\mathcal{H}$ separabilen.

3. Naj bo $K \subseteq \mathbb{C}$ neprazna kompaktna podmnožica kompleksne ravnine. Dokaži, da za vsako zvezno funkcijo $f : K \to \mathbb{C}$ in vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak polinom p dveh spremenljivk, da velja
$$|f(z) - p(z, \overline{z})| < \epsilon$$
za vse $z \in K$.

4. Vektorski prostor $\mathcal{C}^1([0, 1])$ zvezno odvedljivih funkcij opremimo z normo
$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$
Dokaži, da je $(\mathcal{C}^1([0, 1]), \|\cdot\|)$ Banachov prostor.

5. Nak bo X normiran prostor in Y Banachov prostor. Dokaži, da je vektorski prostor $\mathcal{B}(X, Y)$ vseh omejenih operatorjev med X in Y Banachov prostor, če ga opremimo z operatorsko normo.

6. Naj bo X normiran prostor. Dokaži, da je njegov normiran dual X^* Banachov prostor.

7. Na prostoru $\mathcal{C}([-1, 1])$ je definirana preslikava A s predpisom
$$(Af)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$
za vsak $x \in [-1, 1]$. Dokaži, da je A omejen operator in izračunaj normo operatorja A. Ali je A injektiven? Ali je A surjektiven?

8. Na Hilbertovem prostoru l^2 definiramo preslikavo
$$A(x_1, x_2, \cdots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots),$$
kjer je $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje kompleksnih števil. Dokaži, da je A omejen operator in izračunaj normo operatorja A. Ali je A injektiven? Ali je A surjektiven? Izračunaj A^*.

9. Na Hilbertovem prostoru l^2 definiramo preslikavo
$$A(x_1, x_2, \cdots) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 + x_3}{2} \ldots\right).$$
Dokaži, da je A omejen operator in izračunaj normo operatorja A. Ali je A injektiven? Izračunaj A^*.