5. SKLOP NALOG

1. Naj bo A omejen operator na Hilbertovem prostoru. Dokaži, da je $\ker A^* = \mathrm{im} A^{\perp}$.

2. Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in $x, y \in \mathcal{H}$ poljubna vektorja. Dokaži, da je operator $x \otimes y$, ki je definiran z
$$(x \otimes y)(z) = \langle z, y \rangle x$$
omejen linearen operator in izračunaj $\|x \otimes y\|$. Določi $(x \otimes y)^*$. Kdaj je operator $x \otimes y$ hermitski?

3. Hilbertov prostor l^2 opremimo z naslednjim skalarnim produktom.
$$[x, y] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x_n \overline{y_n}.$$
Dokaži, da $[\cdot, \cdot]$ res določa skalarni produkt na l^2. Dokaži, da je norma, ki jo inducira skalarni produkt $[\cdot, \cdot]$, ekvivalentna običajni normi prostora l^2. Glede na skalarni produkt $[\cdot, \cdot]$ določi S^*.

4. Naj bo N normalen operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Naj bo $c > 0$ tako pozitivno število, da za vse $x \in \mathcal{H}$ velja $\|Nx\| \geq c\,\|x\|$. Dokaži, da je N bijektiven. Dokaži, da je N^{-1} omejen operator.

5. Naj bo S operator desnega pomika na Hilbertovem prostoru l^2. Dokaži, da operatorja S in S^* nimata netrivialnega skupnega invariantnega podprostora.

6. Naj bo A hermitski operator in M invarianten podprostor operatorja A. Dokaži, da je tudi $M^{\perp}$ invarianten za operator A.

7. Naj bo E omejen idempotenten linearen operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Dokaži, da velja $\ker(I - E) = \mathrm{im} E$. Dokaži, da je $\mathrm{im} E$ zaprt podprostor v $\mathcal{H}$.

8. Naj bo E omejen neničeln linearen idempotenten operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Dokaži, da so naslednje trditve ekvivalentne:
   (a) E je projektor.
   (b) $\|E\| = 1$.
   (c) E je hermitski.
   (d) E je normalen.
   (e) $\langle Eh, h \rangle \geq 0$ za vse $h \in \mathcal{H}$.

9. Naj $A : X \to Y$ omejen linearen operator med Banachovima prostoroma. Dokaži, da so naslednje trditve ekvivalentne:
   (a) A je kompakten operator.
   (b) A preslika omejene množice v relativno kompaktne množice.
   (c) Za vsako omejeno zaporedje $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ v X ima zaporedje $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno podzaporedje v Y.

10. Dokaži, da identičen operator na neskončnorazsežnem Hilbertovem prostoru ni kompakten operator.