6. SKLOP NALOG

1. Vektorski prostor $\mathbb{F}^n$ opremimo z normo

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

   Dokaži, da je zaprta enotska krogla prostora $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|)$ kompaktna.

2. Dokaži, da sta poljubni normi na končnorazsežnem vektorskem prostoru ekvivalentni.

3. Naj bosta Xin Y normirana prostora. Če je X končnorazsežen prostor, dokaži, da je vsaka linearna preslikava iz X v Y zvezna.

4. Dokaži, da so vsi končnorazsežni vektorski prostori iste dimenzije topološko izomorfni.

5. Naj bo X normiran prostor in Y končnorazsežen podprostor v X. Dokaži, da je Y poln in zaprt v X.

6. Naj bo $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje v $\mathbb{C}$. Naj bo S_w uteženi operator desnega pomika na l^2 z utežmi $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dokaži, da je S_w kompakten operator na l^2 natanko takrat ko zaporedje $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0.

7. Ali je operator $A : l^2 \to l^2$, ki je podan s predpisom

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_1 - \frac{x_2}{2}, \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{3}, \frac{x_3}{3} - \frac{x_4}{4}, \ldots\right),$$

   kompakten?

8. Naj bo K kompakten operator na Banachovem prostoru X in naj bo Y zaprt invarianten podprostor operatorja K. Dokaži, da je tudi $K|_Y : Y \to Y$ kompakten operator.

9. Naj bo X Banachov prostor in $E : X \to X$ omejen idempotent. Dokaži, da je E kompakten operator natanko takrat, ko je $\dim \mathrm{im} E < \infty$.

10. Naj bosta podana taka sebiadjungirana operatorja K in L na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, da za vsak $x \in \mathcal{H}$ velja

$$\langle K^2x, x\rangle \geq \langle L^2x, x\rangle.$$

    Če je K kompakten, dokaži, da je tudi L kompakten.

11. Naj bo $\mathcal{H}$ separabilen Hilbertov prostor in naj bo $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}$. Definirajmo:

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty\} \qquad \text{in} \qquad \langle A, B\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, Be_n\rangle$$

    za $A, B \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. Dokaži:

    (a) $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ je Hilbertov prostor.
    (b) Za $A \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ velja $\|A\| \leq \|A\|_2$.
    (c) Za $A \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ velja $A^* \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ in $\|A^*\|_2 = \|A\|_2$.

(d) Vsak operator iz $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ linearna kombinacija dveh sebiadjungiranih operatorjev iz $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$.

(e) Za $A \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ in $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je $AB, BA \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ in velja $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|$, $\|BA\|_2 \leq \|B\|\|A\|_2$.

(f) Vsii operatorji v $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ so kompaktni. Konstruiraj sebiadjungiran kompakten operator, ki ni v $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$.