7. SKLOP NALOG

1. Klasificiraj spekter naslednjih operatorjev na Hilbertovem prostoru l^2.

   (a) $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, -x_1, x_4/2, -x_3/2, x_6/3, -x_5/3, \ldots)$.

   (b) $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2/2, x_3/3, x_4/4, \ldots)$.

2. Poišči vse kompaktne operatorje množenja na prostoru $L^2_{\text{cont}}[0, 1]$.

3. Naj bo $D : l^2 \to l^2$ diagonalen operator podan z omejenim zaporedjem $\{a_n\}_n$. Dokaži, da je D obrnljiv natanko takrat, ko velja $\inf_n |a_n| > 0$.

4. Klasificiraj spekter diagonalnega operatorja na l^2.

5. Dokaži, da za vsako neprazno kompaktno podmnožico K kompleksne ravnine $\mathbb{C}$ obstaja tak omejen operator T na l^2, da velja $\sigma(T) = K$.

6. Naj bo T kompakten hermitski operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Če so $\{e_n\}$ in $\{\mu_n\}$ kot v [Corollary 5.4, Conway: A first course in functional analysis] in če je h dan vektor v $\mathcal{H}$, pokaži, da obstaja tak vektor $f \in \mathcal{H}$ da je $Tf = h$ natanko takratk, ko velja $h \perp \ker T$ in $\sum_n \mu_n^{-2} |\langle h, e_n \rangle|^2 < \infty$.

7. Dokaži, da je operator $T : l^2 \to l^2$

   $$T(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2, x_3/2 - x_4/2, -x_3/2 + x_4, x_5/3 - x_6/3, -x_5/3 + 2x_6/3, \ldots)$$

   kompakten hermitski operator in ga diagonaliziraj.