Domača naloga iz UFA

Rešitve oddajte do 9.12.2010 v moj predalček ali po elektronski pošti na naslov marko.kandic@fmf.uni-lj.si. Dovoljena je uporaba dostopne literature v knjižnjici ali na spletu. Sodelovanje s kolegi je prepovedano, lahko pa se posvetujete z menoj. Vse odgovore dobro utemeljite!

1. **[10]** Naj bo $G \subseteq \mathbb{C}$ odprta podmnožica in naj bodo $a_1, \ldots, a_n \in G$ poljubne točke. Naj bodo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ izbrana kompleksna števila. Dokaži, da je množica
$$\{f \in L_a^2(G) : \; f(a_1) = \alpha_1, \cdots, f(a_n) = \alpha_n\}$$
zaprta podmnožica Bergmanovega prostora $L_a^2(G)$.

2. **[10]** Prostor $\mathcal{C}([0,\pi])$ opremimo s skalarnim produktom
$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi t f(t)\overline{g(t)}dt.$$
Dokaži, da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ res določa skalarni produkt na $\mathcal{C}([0,\pi])$ in z Gram-Schmidtovim postopkom ortonormaliziraj funkcije $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ in $h(x) = \cos x$.

3. **[10]** Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ taka zvezna funkcija, da za vse $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ velja
$$\int_a^b x^n f(x)dx = 0.$$
Dokaži, da je $f = 0$ na intervalu $[a,b]$.

4. **[15]** Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksen Hilbertov prostor in A tak omejen linearen operator, da za vse $x \in \mathcal{H}$ velja $\langle Ax, x\rangle \geq 0$. Dokaži naslednji trditvi:
   (a) $|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \langle Ay, y\rangle$ za vse $x, y \in \mathcal{H}$.
   (b) Če je $\langle Ax, x\rangle = 0$, potem je $Ax = 0$.

5. **[15]** Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ omejen linearen operator s končnorazsežno zalogo vrednosti. Dokaži, da obstaja $n \in \mathbb{N}$, vektorji $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ in paroma pravokotni vektorji $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{H}$, tako da velja
$$A = \sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i.$$

6. **[10]** Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksni Hilbertov prostor in A omejen linearen operator na $\mathcal{H}$. Naj bo C tak omejen linearen operator na $\mathcal{H}$, da je operator C^* izometrija. Naj za vsaka $x \in \mathcal{H}$ in $\lambda \in \mathbb{C}$ velja
$$\|Cx + \lambda Ax\| \geq \|x\|.$$
Dokaži, da je $A = 0$.

7. **[15]** Naj bosta A in B hermitska operatorja na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, za katera velja $AB = 0$. Dokaži, da velja
$$\|A + B\| = \max\{\|A\|, \|B\|\}.$$

8. **[15]** Naj bo linearen operator $A : l^2 \to l^2$ podan s predpisom
$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots,) = (x_1 - 2x_2, x_2 - 2x_3, x_3 - 2x_4, \ldots).$$
Izračunaj $\|A\|$ in A^*. Ali je operator A injektiven? Ali je normalen? Ali je zaloga vrednosti operatorja A gosta v l^2?