# Domača naloga iz UFA

Rešitve oddajte do 6.12.2012 v moj predalček ali po elektronski pošti na naslov marko.kandic@fmf.uni-lj.si. Dovoljena je uporaba dostopne literature v knjižnjici ali na spletu. Sodelovanje s kolegi je prepovedano, lahko pa se posvetujete z menoj. Vse odgovore dobro utemeljite!

1. **[10]** Naj bo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom nad obsegom $\mathbb{F}$.

   (a) Če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, dokaži, da iz $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ sledi $x \perp y$.

   (b) Če je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dokaži, da iz $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+iy\|^2$ sledi $x \perp y$.

2. **[15]** Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Za neprazno podmnožico $A$ v $\mathcal{H}$ definirajmo

$$A' = \{x \in \mathcal{H} : \, |\langle x, y \rangle| \leq 1 \text{ za vse } y \in A\}.$$

   Določi $A'$ v primeru, ko je

   (a) $A$ zaprta enotska krogla v $\mathcal{H}$,

   (b) $A$ zaprt podprostor v $\mathcal{H}$.

3. **[15]** Dokaži, da je s predpisom

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x_n}{\sqrt{(n+1)!}}, \qquad x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$$

   definiran omejen linearen funkcional na prostoru $l^2$. Določi njegovo normo!

4. **[15]** Naj bo $f$ zvezna funkcija na $[a,b] \times [c,d]$. Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $n \in \mathbb{N}$ in obstajajo funkcije $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}([a,b])$ ter $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{C}([c,d])$, da je

$$\left| f(x,y) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j(y) \right| < \epsilon$$

   za vse $x \in [a,b]$ in $y \in [c,d]$.

5. **[15]** Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathcal{K}$ zaprt podprostor v $\mathcal{H}$. Naj bo $P$ ortogonalni projektor na podprostor $\mathcal{K}^\perp$ vzdolž $\mathcal{K}$. Na prostoru $\mathcal{H}/\mathcal{K} \times \mathcal{H}/\mathcal{K}$ definiramo preslikavo $[\cdot, \cdot]$ s predpisom

$$[x + \mathcal{K}, y + \mathcal{K}] = \langle Px, Py \rangle.$$

   Dokaži, da je $(\mathcal{H}/\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$ Hilbertov prostor. Kateremu Hilbertovem prostoru je izomorfen?

6. **[15]** Naj bo $A : l^2 \to l^2$ podan s predpisom

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_1 + x_2, 0, x_3 + x_4, 0, \ldots).$$

   (a) Dokaži, da je $A$ idempotent.

   (b) Izračunaj normo operatorja $A + I$.

(c) Izračunaj $A^*$.

(d) Za katera kompleksna števila $\lambda$ je operator $A - \lambda I$ injektiven? Kdaj je operator $A - \lambda I$ surjektiven?

7. **[15]** Naj bo $S$ operator desnega pomika na Hilbertovem prostoru $l^2$. Ugotovi, katere izmed naslednjih trditev veljajo. Odgovore utemelji!

   (a) Za vsak $x \in \mathcal{H}$ zaporedje $\{S^n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti 0.

   (b) Za vsak $x \in \mathcal{H}$ zaporedje $\{(S^n)^* x\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti 0.

   (c) Za vsaka $x, y \in \mathcal{H}$ zaporedje $\{\langle S^n x, y \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti 0.

   (d) Za vsaka $x, y \in \mathcal{H}$ zaporedje $\{\langle (S^n)^* x, y \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti 0.