Domača naloga iz UFA

Rešite največ 9 nalog. V oglatem oklepaju je pred vsako nalogo navedeno možno število točk. Skrajni rok za oddajo rešitev je 19.12.2013. Rešitve oddajte v moj predalček ali po elektronski pošti na naslov marko.kandic@fmf.uni-lj.si. Dovoljena je uporaba dostopne literature v knjižnici ali na spletu. Sodelovanje s kolegi je prepovedano. Vse odgovore dobro utemeljite!

1. **[10]** Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj za zaporedji vektorjev $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz zaprte enotske krogle prostora $\mathcal{V}$ velja
$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = 1.$$
Dokaži, da zaporedji $\{x_n - y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergirata! Določi njuni limiti.

2. **[10]** Naj za preslikavi f in g na vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ s skalarnim produktom velja
$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$
za vse $x, y \in \mathcal{V}$. Dokaži, da sta f in g linearni preslikavi.

3. **[10]** Naj bo $\mathbb{R}_n[x]$ vektorski prostor vseh polinomov stopnje največ n nad obsegom realnih števil. Dokaži, da obstaja tak polinom $q \in \mathbb{R}_n[x]$, da za vse polinome $p \in \mathbb{R}_n[x]$ velja
$$\int_0^1 p(x)dx = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

4. **[10]** Za vsak $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ definirajmo
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\ .$$
   (a) Dokaži, da je f omejen linearen funkcional na Hilbertovem prostoru l^2.
   (b) Določi njegovo normo!
   (c) Naj bo $a^{(k)}$ vektor v l^2, ki ima prvih k komponent enakih 1, naprej pa same ničle. Izračunaj limito
$$\lim_{k\to\infty} f(a^{(k)}).$$

5. **[10]** Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in f omejen linearen funkcional na $\mathcal{H}$. Vektorski prostor $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ opremimo s skalarnim produktom
$$\langle x\oplus y, z\oplus w\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, w\rangle, \qquad x, y, z, w \in \mathcal{H}.$$
Na $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ definirajmo linearen funkcional F s predpisom
$$F(x\oplus y) = f(x+y), \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$
Dokaži, da obstaja tak vektor $z \in \mathcal{H}$, da je $F(x\oplus y) = \langle x\oplus y, z\oplus z\rangle$ za vse $x, y \in \mathcal{H}$.

6. **[10]** Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksen Hilbertov prostor in A omejen operator na $\mathcal{H}$.

(a) Poišči taka sebiadjungirana operatorja B in C, da velja $A = B + iC$.

(b) Dokaži, da velja

$$\|A\| \geq \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| \geq \frac{1}{2}\|A\|.$$

7. **[10]** Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in A omejen operator na $\mathcal{H}$. Dokaži, da je $A^2 = I$ natanko takrat, ko je $A = 2P - I$ za nek idempotenten omejen operator P na $\mathcal{H}$.

8. **[10]** Naj bo $a \in l^2$ poljuben vektor. Definirajmo operator $T_a : l^2 \to l^2$ s predpisom

$$T_a x = (\langle x, a\rangle, x_1, x_2, \ldots).$$

   (a) Dokaži, da je T_a omejen linearen operator na l^2 in izračunaj njegovo normo.

   (b) Izračunaj T_a^*.

   (c) V primeru $a = (1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots)$ izračunaj lastne vrednosti operatorja T_a.

9. **[10]** Naj bodo A, B in C operatorji na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, katerih norme so manjše ali enake 1. Naj bo C izometrija in $2C = A + B$. Dokaži, da je $A = B = C$.

10. **[20]** Naj bo $\mathcal{C}([a, b])$ Banachov prostor vseh realnih zveznih funkcij na intervalu $[a, b]$, opremljen s supremum normo $\|\cdot\|_\infty$. Dokaži, da je separabilen. Vse korake v dokazu dobro utemelji!