Verjetnost 2
Drugo poglavje
Časi ustavljanja

Matjaž Omladič

Oktober 2010

Vsebina

Časi prvih prehodov in vrnitev

Pri poljubnih stanjih $s_i, s_j \in S$ vpeljemo "slučajno spremenljivko"

$$T_{ij} = [\min\{n \geqslant 1; X_n = s_j\}/X_0 = s_i]$$

V primeru, da tak n ne obstaja, dopustimo kot vrednost T_{ij} tudi "število" $+\infty$. Taka nekoliko posplošena slučajna spremenljivka ima svoje vrednosti v množici $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Časi prvih prehodov in vrnitev

Pri poljubnih stanjih $s_i, s_j \in S$ vpeljemo "slučajno spremenljivko"

$$T_{ij} = [\min\{n \geqslant 1; X_n = s_j\}/X_0 = s_i]$$

V primeru, da tak n ne obstaja, dopustimo kot vrednost T_{ij} tudi "število" $+\infty$. Taka nekoliko posplošena slučajna spremenljivka ima svoje vrednosti v množici $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. V primeru $i \neq j$ poimenujemo tako vpeljano slučajno spremenljivko *čas prvega prehoda* iz stanja s_i v stanje s_j.

Časi prvih prehodov in vrnitev

Pri poljubnih stanjih $s_i, s_j \in S$ vpeljemo "slučajno spremenljivko"

$$T_{ij} = [\min\{n \geqslant 1; X_n = s_j\}/X_0 = s_i]$$

V primeru, da tak n ne obstaja, dopustimo kot vrednost T_{ij} tudi "število" $+\infty$. Taka nekoliko posplošena slučajna spremenljivka ima svoje vrednosti v množici $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. V primeru $i \neq j$ poimenujemo tako vpeljano slučajno spremenljivko *čas prvega prehoda* iz stanja s_i v stanje s_j. V primeru $i = j$ pa je to *čas prve vrnitve* iz stanja s_i vase.

Časi prvih prehodov in vrnitev

Pri poljubnih stanjih $s_i, s_j \in S$ vpeljemo "slučajno spremenljivko"

$$T_{ij} = [\min\{n \geqslant 1; X_n = s_j\}/X_0 = s_i]$$

V primeru, da tak n ne obstaja, dopustimo kot vrednost T_{ij} tudi "število" $+\infty$. Taka nekoliko posplošena slučajna spremenljivka ima svoje vrednosti v množici $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
V primeru $i \neq j$ poimenujemo tako vpeljano slučajno spremenljivko *čas prvega prehoda* iz stanja s_i v stanje s_j.
V primeru $i = j$ pa je to *čas prve vrnitve* iz stanja s_i vase.
Oglejmo si verjetnostne porazdelitve teh časov za $n \in \mathbb{N}_\infty$.
Najprej vpeljimo oznake in potem poiščimo zvezo s prehodnimi verjetnostmi:

Časi prvih prehodov in vrnitev

Pri poljubnih stanjih $s_i, s_j \in S$ vpeljemo "slučajno spremenljivko"

$$T_{ij} = [\min\{n \geqslant 1; X_n = s_j\}/X_0 = s_i]$$

V primeru, da tak n ne obstaja, dopustimo kot vrednost T_{ij} tudi "število" $+\infty$. Taka nekoliko posplošena slučajna spremenljivka ima svoje vrednosti v množici $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. V primeru $i \neq j$ poimenujemo tako vpeljano slučajno spremenljivko *čas prvega prehoda* iz stanja s_i v stanje s_j. V primeru $i = j$ pa je to *čas prve vrnitve* iz stanja s_i vase. Oglejmo si verjetnostne porazdelitve teh časov za $n \in \mathbb{N}_\infty$. Najprej vpeljimo oznake in potem poiščimo zvezo s prehodnimi verjetnostmi:

Zveza med verjetnostmi časov in prehodnimi verjetnostmi

$$f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij} = n), \quad \text{ter} \quad f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij} < \infty);$$

od tod pa dobimo še

$$P(T_{ij} = \infty) = f_{ij}^{(\infty)} = 1 - f_{ij}^{*}.$$

Izrek

Za poljubni stanji s_i in s_j velja:

Zveza med verjetnostmi časov in prehodnimi verjetnostmi

$$f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij} = n), \quad \text{ter} \quad f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij} < \infty);$$

od tod pa dobimo še

$$P(T_{ij} = \infty) = f_{ij}^{(\infty)} = 1 - f_{ij}^{*}.$$

Izrek

Za poljubni stanji s_i in s_j velja:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)},$$

kjer $p_{ij}^{(n)}$ označuje (ij)-to komponento matrike P^n.

Zveza med verjetnostmi časov in prehodnimi verjetnostmi

$$f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij} = n), \quad \text{ter} \quad f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij} < \infty);$$

od tod pa dobimo še

$$P(T_{ij} = \infty) = f_{ij}^{(\infty)} = 1 - f_{ij}^{*}.$$

Izrek

Za poljubni stanji s_i in s_j velja:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)},$$

kjer $p_{ij}^{(n)}$ označuje (ij)-to komponento matrike P^n.

Časi s prepovedjo

Vpeljimo verjetnosti

$$g_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

$$g_{ij}^{(n)} = P\left(X_n = s_j, X_{n-1} \neq s_i, \ldots, X_1 \neq s_i\}/X_0 = s_i\right).$$

Medtem ko pomeni $f_{ij}^{(n)}$ verjetnost za prehod iz stanja s_i v stanje s_j v n korakih brez vmesnih obiskov stanja s_i, pomeni $g_{ij}^{(n)}$ verjetnost za prehod iz stanja s_i v stanje s_j v n korakih brez vmesnih obiskov stanja s_j. Gre torej spet za porazdelitev nekega slučajnega časa. V obeh primerih gre za *čas s prepovedjo* (obiska nekega stanja). Velja soroden izrek.

Časi s prepovedjo

Vpeljimo verjetnosti

$$g_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

$$g_{ij}^{(n)} = P\left(X_n = s_j, X_{n-1} \neq s_i, \ldots, X_1 \neq s_i\right\}/X_0 = s_i\right).$$

Medtem ko pomeni $f_{ij}^{(n)}$ verjetnost za prehod iz stanja s_i v stanje s_j v n korakih brez vmesnih obiskov stanja s_i, pomeni $g_{ij}^{(n)}$ verjetnost za prehod iz stanja s_i v stanje s_j v n korakih brez vmesnih obiskov stanja s_j. Gre torej spet za porazdelitev nekega slučajnega časa. V obeh primerih gre za *čas s prepovedjo* (obiska nekega stanja). Velja soroden izrek.

Izrek

Za poljubni stanji s_i in s_j velja:

Časi s prepovedjo

Vpeljimo verjetnosti

$$g_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

$$g_{ij}^{(n)} = P\left(X_n = s_j, X_{n-1} \neq s_i, \ldots, X_1 \neq s_i\}/X_0 = s_i\right).$$

Medtem ko pomeni $f_{ij}^{(n)}$ verjetnost za prehod iz stanja s_i v stanje s_j v n korakih brez vmesnih obiskov stanja s_i, pomeni $g_{ij}^{(n)}$ verjetnost za prehod iz stanja s_i v stanje s_j v n korakih brez vmesnih obiskov stanja s_j. Gre torej spet za porazdelitev nekega slučajnega časa. V obeh primerih gre za *čas s prepovedjo* (obiska nekega stanja). Velja soroden izrek.

Izrek

Za poljubni stanji s_i in s_j velja:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(k)} g_{ij}^{(n-k)}.$$

Časi s prepovedjo

Vpeljimo verjetnosti

$$g_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

$$g_{ij}^{(n)} = P\left(X_n = s_j, X_{n-1} \neq s_i, \ldots, X_1 \neq s_i\} / X_0 = s_i\right).$$

Medtem ko pomeni $f_{ij}^{(n)}$ verjetnost za prehod iz stanja s_i v stanje s_j v n korakih brez vmesnih obiskov stanja s_i, pomeni $g_{ij}^{(n)}$ verjetnost za prehod iz stanja s_i v stanje s_j v n korakih brez vmesnih obiskov stanja s_j. Gre torej spet za porazdelitev nekega slučajnega časa. V obeh primerih gre za *čas s prepovedjo* (obiska nekega stanja). Velja soroden izrek.

Izrek

Za poljubni stanji s_i in s_j velja:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(k)} g_{ij}^{(n-k)}.$$

Čas zadnjega izhoda

Slednja dva izreka poimenujemo po vrsti *dekompozicija časov prvega prihoda* in *časov zadnjega izhoda*. Vpeljemo še

$$g_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} g_{ij}^{(n)}.$$

Dualnost obnašanja obeh časov vidimo lepo iz naslednjega izreka.

Čas zadnjega izhoda

Slednja dva izreka poimenujemo po vrsti *dekompozicija časov prvega prihoda* in *časov zadnjega izhoda*. Vpeljemo še

$$g_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} g_{ij}^{(n)}.$$

Dualnost obnašanja obeh časov vidimo lepo iz naslednjega izreka.

Izrek

Za poljubni različni stanji s_i in s_j so ekvivalentne trditve:

Čas zadnjega izhoda

Slednja dva izreka poimenujemo po vrsti *dekompozicija časov prvega prihoda* in *časov zadnjega izhoda*. Vpeljemo še

$$g_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} g_{ij}^{(n)}.$$

Dualnost obnašanja obeh časov vidimo lepo iz naslednjega izreka.

Izrek

Za poljubni različni stanji s_i in s_j so ekvivalentne trditve:

- $s_i \rightsquigarrow s_j$
- $f_{ij}^* > 0$
- $g_{ij}^* > 0$

Čas zadnjega izhoda

Slednja dva izreka poimenujemo po vrsti *dekompozicija časov prvega prihoda* in *časov zadnjega izhoda*. Vpeljemo še

$$g_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} g_{ij}^{(n)}.$$

Dualnost obnašanja obeh časov vidimo lepo iz naslednjega izreka.

Izrek

Za poljubni različni stanji s_i in s_j so ekvivalentne trditve:

- $s_i \rightsquigarrow s_j$
- $f_{ij}^* > 0$
- $g_{ij}^* > 0$

Rodovne funkcije

Vpeljemo rodovne funkcije zgoraj vpeljanih verjetnosti:

$$P_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n, \quad F_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n, \quad in$$

$$G_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{ij}^{(n)} z^n.$$

Iz obeh dekompozicijskih izrekov dobimo nov izrek, ki povezuje te rodovne funkcije.

Izrek (Dekompozicija rodovnih funkcij)

Rodovne funkcije

Vpeljemo rodovne funkcije zgoraj vpeljanih verjetnosti:

$$P_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n, \quad F_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n, \quad in$$

$$G_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{ij}^{(n)} z^n.$$

Iz obeh dekompozicijskih izrekov dobimo nov izrek, ki povezuje te rodovne funkcije.

Izrek (Dekompozicija rodovnih funkcij)

- $P_{ij}(z) = \delta_{ij} + F_{ij}(z) P_{jj}(z)$
- $P_{ij}(z) = P_{ii}(z) G_{ij}(z)$ (za $i \neq j$).

Rodovne funkcije

Vpeljemo rodovne funkcije zgoraj vpeljanih verjetnosti:

$$P_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n, \quad F_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n, \quad in$$

$$G_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{ij}^{(n)} z^n.$$

Iz obeh dekompozicijskih izrekov dobimo nov izrek, ki povezuje te rodovne funkcije.

Izrek (Dekompozicija rodovnih funkcij)

- $P_{ij}(z) = \delta_{ij} + F_{ij}(z) P_{jj}(z)$
- $P_{ij}(z) = P_{ii}(z) G_{ij}(z)$ *(za $i \neq j$).*

Abelov izrek

Naj bo $c_n \geqslant 0$ zaporedje relanih števil, za katero ima potenčna vrsta

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

konvergenčni radij ne manjši od 1.

Izrek (Abelov izrek iz potenčnih vrst)

Abelov izrek

Naj bo $c_n \geqslant 0$ zaporedje relanih števil, za katero ima potenčna vrsta

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

konvergenčni radij ne manjši od 1.

Izrek (Abelov izrek iz potenčnih vrst)

Tedaj obstaja (končna ali neskončna) desna limita funkcije $C(z)$, ko gre $z \uparrow 1$ in je enaka

$$\lim_{z \uparrow 1} C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Abelov izrek

Naj bo $c_n \geqslant 0$ zaporedje relanih števil, za katero ima potenčna vrsta

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

konvergenčni radij ne manjši od 1.

Izrek (Abelov izrek iz potenčnih vrst)

Tedaj obstaja (končna ali neskončna) desna limita funkcije $C(z)$, ko gre $z \uparrow 1$ in je enaka

$$\lim_{z \uparrow 1} C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Ta izrek spada v elementarno analizo in ga pogosto rabimo, ko želimo kaj izračunati s pomočjo rodovnih funkcij.

Abelov izrek

Naj bo $c_n \geqslant 0$ zaporedje relanih števil, za katero ima potenčna vrsta

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

konvergenčni radij ne manjši od 1.

Izrek (Abelov izrek iz potenčnih vrst)

Tedaj obstaja (končna ali neskončna) desna limita funkcije $C(z)$, ko gre $z \uparrow 1$ in je enaka

$$\lim_{z \uparrow 1} C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n .$$

Ta izrek spada v elementarno analizo in ga pogosto rabimo, ko želimo kaj izračunati s pomočjo rodovnih funkcij.

Povrnljiva in minljiva stanja

Za stanje $s_i \in S$ pravimo, da je *povrnljivo*, če je $f_{ii}^* = 1$ in *minljivo* sicer. Povrnljiva so torej natanko tista stanja, v katera se veriga vrne z verjetnostjo 1 v končnem času.

Izrek

- *Za minljiva stanja s_i velja*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}^*}.$$

Povrnljiva in minljiva stanja

Za stanje $s_i \in S$ pravimo, da je *povrnljivo*, če je $f_{ii}^* = 1$ in *minljivo* sicer. Povrnljiva so torej natanko tista stanja, v katera se veriga vrne z verjetnostjo 1 v končnem času.

Izrek

- *Za minljiva stanja s_i velja*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}^*}.$$

- *Stanje je povrnljivo natanko takrat, ko je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ divergentna.*

Povrnljiva in minljiva stanja

Za stanje $s_i \in S$ pravimo, da je *povrnljivo*, če je $f_{ii}^* = 1$ in *minljivo* sicer. Povrnljiva so torej natanko tista stanja, v katera se veriga vrne z verjetnostjo 1 v končnem času.

Izrek

- *Za minljiva stanja s_i velja*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}^*}.$$

- *Stanje je povrnljivo natanko takrat, ko je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ divergentna.*

Povrnljiva in minljiva stanja - nadaljevanje

Izrek (Nadaljevanje)

- *Za minljivo stanje s_j velja, da je vrsta*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

konvergentna za vsako stanje $s_i \in S$.

- *V posebnem velja za vsako minljivo stanje s_j, da je $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ za vsako stanje $s_i \in S$.*

Povrnljiva in minljiva stanja - nadaljevanje

Izrek (Nadaljevanje)

- *Za minljivo stanje s_j velja, da je vrsta*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

konvergentna za vsako stanje $s_i \in S$.

- *V posebnem velja za vsako minljivo stanje s_j, da je $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ za vsako stanje $s_i \in S$.*
- *Če je stanje s_i povrnljivo in je $s_i \rightsquigarrow s_j$, potem je tudi stanje s_j povrnljivo.*

Povrnljiva in minljiva stanja - nadaljevanje

Izrek (Nadaljevanje)

- *Za minljivo stanje s_j velja, da je vrsta*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

  konvergentna za vsako stanje $s_i \in S$.
- *V posebnem velja za vsako minljivo stanje s_j, da je $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ za vsako stanje $s_i \in S$.*
- *Če je stanje s_i povrnljivo in je $s_i \rightsquigarrow s_j$, potem je tudi stanje s_j povrnljivo.*
- *V vsakem ekvivalenčnem razredu med seboj povezanih stanj so bodisi vsa stanja povrnljiva bodisi vsa stanja minljiva.*

Povrnljiva in minljiva stanja - nadaljevanje

Izrek (Nadaljevanje)

- *Za minljivo stanje s_j velja, da je vrsta*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

konvergentna za vsako stanje $s_i \in S$.

- *V posebnem velja za vsako minljivo stanje s_j, da je $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ za vsako stanje $s_i \in S$.*
- *Če je stanje s_i povrnljivo in je $s_i \rightsquigarrow s_j$, potem je tudi stanje s_j povrnljivo.*
- *V vsakem ekvivalenčnem razredu med seboj povezanih stanj so bodisi vsa stanja povrnljiva bodisi vsa stanja minljiva.*

Časi ustavljanja

Slučajno spremenljivko T (z vrednostmi v nenegativnih celih številih) poimenujemo *čas ustavljanja* (glede na dano markovsko verigo $X_0, X_1, \ldots$), če velja, da je pri poljubnem $n \geqslant 0$ dogodek $\{T = n\}$ odvisen le od slučajnih spremenljivk $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$. Primer časa ustavljanja je npr. čas prvega prehoda oz. vrnitve, saj velja:

$$\{T_{ij} = n\} = \{X_1 \neq s_j, X_2 \neq s_j, \ldots, X_{n-1} \neq s_j | X_0 = s_i\}.$$

Podobni premisleki veljajo tudi za druge čase s prepovedjo. Časi ustavljanja nam pomagajo pri razmislekih o časovni odvisnosti.

Časi ustavljanja

Slučajno spremenljivko T (z vrednostmi v nenegativnih celih številih) poimenujemo *čas ustavljanja* (glede na dano markovsko verigo $X_0, X_1, \ldots$), če velja, da je pri poljubnem $n \geqslant 0$ dogodek $\{T = n\}$ odvisen le od slučajnih spremenljivk $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$. Primer časa ustavljanja je npr. čas prvega prehoda oz. vrnitve, saj velja:

$$\{T_{ij} = n\} = \{X_1 \neq s_j, X_2 \neq s_j, \ldots, X_{n-1} \neq s_j | X_0 = s_i\}.$$

Podobni premisleki veljajo tudi za druge čase s prepovedjo. Časi ustavljanja nam pomagajo pri razmislekih o časovni odvisnosti. Vpeljimo zdaj čas m-tega prehoda (oz. vrnitve) $T_{ij}^{(m)}$, ki je enak n, kadar v času n pride veriga v stanje s_j natanko m-tič pri pogoju, da je začela v času 0 v stanju s_i. Tudi ta čas je čas ustavljanja.

Časi ustavljanja

Slučajno spremenljivko T (z vrednostmi v nenegativnih celih številih) poimenujemo *čas ustavljanja* (glede na dano markovsko verigo $X_0, X_1, \ldots$), če velja, da je pri poljubnem $n \geqslant 0$ dogodek $\{T = n\}$ odvisen le od slučajnih spremenljivk $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$. Primer časa ustavljanja je npr. čas prvega prehoda oz. vrnitve, saj velja:

$$\{T_{ij} = n\} = \{X_1 \neq s_j, X_2 \neq s_j, \ldots, X_{n-1} \neq s_j | X_0 = s_i\}.$$

Podobni premisleki veljajo tudi za druge čase s prepovedjo. Časi ustavljanja nam pomagajo pri razmislekih o časovni odvisnosti. Vpeljimo zdaj čas m-tega prehoda (oz. vrnitve) $T_{ij}^{(m)}$, ki je enak n, kadar v času n pride veriga v stanje s_j natanko m-tič pri pogoju, da je začela v času 0 v stanju s_i. Tudi ta čas je čas ustavljanja.

Poljubno mnogo obiskov

Zaporedju dogodkov $A_1, A_2, A_3, \ldots$ priredimo dogodek, da se dogodki iz tega zaporedja primerijo poljubno mnogokrat. Formalno zapišemo tak dogodek v obliki

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{K=k}^{\infty} A_K$$

Tak dogodek se ne spremeni, če v zaporedju dogodkov izpustimo končno mnogo členov. Dogodkom s to lastnostjo pravimo *repni dogodki* zaporedja dogodkov $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Če bi bili dogodki iz tega zaporedja neodvisni, potem bi veljalo, da imajo lahko repni dogodki le verjetnost 0 ali 1. Tako pravi Zakon $0-1$ Kolmogorova.

Poljubno mnogo obiskov

Zaporedju dogodkov $A_1, A_2, A_3, \ldots$ priredimo dogodek, da se dogodki iz tega zaporedja primerijo poljubno mnogokrat. Formalno zapišemo tak dogodek v obliki

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{K=k}^{\infty} A_K$$

Tak dogodek se ne spremeni, če v zaporedju dogodkov izpustimo končno mnogo členov. Dogodkom s to lastnostjo pravimo *repni dogodki* zaporedja dogodkov $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Če bi bili dogodki iz tega zaporedja neodvisni, potem bi veljalo, da imajo lahko repni dogodki le verjetnost 0 ali 1. Tako pravi Zakon $0-1$ Kolmogorova.

V nadaljevanju se bomo posvetili poljubno mnogo obiskom nekega stanja markovske verige. Vpeljemo q_{ij} kot verjetnost dogodka, da veriga obišče stanje s_j poljubno mnogokrat pri pogoju, da je začela v stanju s_i.

Poljubno mnogo obiskov

Zaporedju dogodkov $A_1, A_2, A_3, \dots$ priredimo dogodek, da se dogodki iz tega zaporedja primerijo poljubno mnogokrat. Formalno zapišemo tak dogodek v obliki

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{K=k}^{\infty} A_K$$

Tak dogodek se ne spremeni, če v zaporedju dogodkov izpustimo končno mnogo členov. Dogodkom s to lastnostjo pravimo *repni dogodki* zaporedja dogodkov $A_1, A_2, A_3, \dots$. Če bi bili dogodki iz tega zaporedja neodvisni, potem bi veljalo, da imajo lahko repni dogodki le verjetnost 0 ali 1. Tako pravi Zakon $0-1$ Kolmogorova.
V nadaljevanju se bomo posvetili poljubno mnogo obiskom nekega stanja markovske verige. Vpeljemo q_{ij} kot verjetnost dogodka, da veriga obišče stanje s_j poljubno mnogokrat pri pogoju, da je začela v stanju s_i.

Poljubno mnogo obiskov — nadaljevanje

Izrek

- *Za poljubno stanje s_i velja, da je*

$$q_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{če je } s_i \text{ povrnljivo;} \\ 0, & \text{če je } s_i \text{ minljivo.} \end{cases}$$

- *Za poljubni stanji s_i in s_j velja, da je*

$$q_{ij} = \begin{cases} f_{ij}^*, & \text{če je } s_j \text{ povrnljivo;} \\ 0, & \text{če je } s_j \text{ minljivo.} \end{cases}$$

Poljubno mnogo obiskov — nadaljevanje

Izrek

- *Za poljubno stanje s_i velja, da je*

$$q_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{če je } s_i \text{ povrnljivo;} \\ 0, & \text{če je } s_i \text{ minljivo.} \end{cases}$$

- *Za poljubni stanji s_i in s_j velja, da je*

$$q_{ij} = \begin{cases} f_{ij}^*, & \text{če je } s_j \text{ povrnljivo;} \\ 0, & \text{če je } s_j \text{ minljivo.} \end{cases}$$

- *Če je stanje s_i povrnljivo in za stanje s_j velja $s_i \rightsquigarrow s_j$, potem je*

$$q_{ij} = q_{ji} = 1.$$

Poljubno mnogo obiskov — nadaljevanje

Izrek

- *Za poljubno stanje s_i velja, da je*

$$q_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{če je } s_i \text{ povrnljivo;} \\ 0, & \text{če je } s_i \text{ minljivo.} \end{cases}$$

- *Za poljubni stanji s_i in s_j velja, da je*

$$q_{ij} = \begin{cases} f^*_{ij}, & \text{če je } s_j \text{ povrnljivo;} \\ 0, & \text{če je } s_j \text{ minljivo.} \end{cases}$$

- *Če je stanje s_i povrnljivo in za stanje s_j velja $s_i \rightsquigarrow s_j$, potem je*

$$q_{ij} = q_{ji} = 1.$$

Fundamentalni razcep — splošni primer

Izrek (Nadaljevanje)

- *V razredu povrnljivih stanj velja za poljubni stanji s_i in s_j, da je $q_{ij} = q_{ji} = 1$.*

Izrek (Fundamentalni razcep)

Množica stanj markovske verige se deli na disjunktne podmnožice M vseh minljivih stanj ter ekvivalenčne razrede povrnljivih stanj $S_1, S_2, S_3, \ldots$. V bločni obliki, prirejeni temu razcepu, ima prehodna matrika P bločno zgornje trikotno obliko

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & * & * & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

Fundamentalni razcep — splošni primer

Izrek (Nadaljevanje)

- *V razredu povrnljivih stanj velja za poljubni stanji s_i in s_j, da je $q_{ij} = q_{ji} = 1$.*

Izrek (Fundamentalni razcep)

Množica stanj markovske verige se deli na disjunktne podmnožice M vseh minljivih stanj ter ekvivalenčne razrede povrnljivih stanj $S_1, S_2, S_3, \ldots$. V bločni obliki, prirejeni temu razcepu, ima prehodna matrika P bločno zgornje trikotno obliko

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & * & * & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

Stacionarna porazdelitev

Naj bo $\pi = \{p_j\} = \{P(X = s_j)\}$ verjetnostna funkcija neke diskretne slučajne spremenljivke X, ki opisuje porazdelitev verjetnosti te spremenljivke po stanjih S. Denimo, da je markovska veriga na naslednjem koraku porazdeljena enako kot X, torej je $X_1 \sim X$, pri pogoju, da je na začetku porazdeljena enako kot X, da je torej $X_0 \sim X$. To pomeni, da je $\pi = \pi P$. Od tod pa sledi indukcijsko, da je $\pi_n = \pi_0 P^n = \pi P^n = \pi$. Drugače povedano, ob začetni porazdelitvi π naj bo tudi inducirana porazdelitev na prvem koraku enaka π, posledično potem na drugem koraku in tako naprej, na vseh nadaljnjih korakih enaka π. Pogoj ima torej za posledico, da ima veriga za vselej to isto porazdelitev po stanjih. Zato je smiselno tako porazdelitev (če obstaja) poimenovati *stacionarna porazdelitev*.

Stacionarna porazdelitev

Naj bo $\pi = \{p_j\} = \{P(X = s_j)\}$ verjetnostna funkcija neke diskretne slučajne spremenljivke X, ki opisuje porazdelitev verjetnosti te spremenljivke po stanjih S. Denimo, da je markovska veriga na naslednjem koraku porazdeljena enako kot X, torej je $X_1 \sim X$, pri pogoju, da je na začetku porazdeljena enako kot X, da je torej $X_0 \sim X$. To pomeni, da je $\pi = \pi P$. Od tod pa sledi indukcijsko, da je $\pi_n = \pi_0 P^n = \pi P^n = \pi$. Drugače povedano, ob začetni porazdelitvi π naj bo tudi inducirana porazdelitev na prvem koraku enaka π, posledično potem na drugem koraku in tako naprej, na vseh nadaljnjih korakih enaka π. Pogoj ima torej za posledico, da ima veriga za vselej to isto porazdelitev po stanjih. Zato je smiselno tako porazdelitev (če obstaja) poimenovati *stacionarna porazdelitev*. V matričnem zapisu pa ta pogoj pomeni, da je $\pi = \pi P$, torej je vrstica π levi lastni vektor prehodne matrike P pri lastni vrednosti 1.

Stacionarna porazdelitev

Naj bo $\pi = \{p_j\} = \{P(X = s_j)\}$ verjetnostna funkcija neke diskretne slučajne spremenljivke X, ki opisuje porazdelitev verjetnosti te spremenljivke po stanjih S. Denimo, da je markovska veriga na naslednjem koraku porazdeljena enako kot X, torej je $X_1 \sim X$, pri pogoju, da je na začetku porazdeljena enako kot X, da je torej $X_0 \sim X$. To pomeni, da je $\pi = \pi P$. Od tod pa sledi indukcijsko, da je $\pi_n = \pi_0 P^n = \pi P^n = \pi$. Drugače povedano, ob začetni porazdelitvi π naj bo tudi inducirana porazdelitev na prvem koraku enaka π, posledično potem na drugem koraku in tako naprej, na vseh nadaljnjih korakih enaka π. Pogoj ima torej za posledico, da ima veriga za vselej to isto porazdelitev po stanjih. Zato je smiselno tako porazdelitev (če obstaja) poimenovati *stacionarna porazdelitev*. V matričnem zapisu pa ta pogoj pomeni, da je $\pi = \pi P$, torej je vrstica π levi lastni vektor prehodne matrike P pri lastni vrednosti 1.

Povprečja časov ustavljanja

Pri nekem stanju $s_j \in S$ postavimo

$$\xi_k(s_j) = \begin{cases} 1, & \text{če je } X_k = s_j; \\ 0, & \text{če je } X_k \neq s_j. \end{cases}$$

in seštejmo $N_n(s_j) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k(s_j)$.

Slučajna spremenljivka $\xi_k(s_j)$ ima vrednost 1 natanko tedaj, kadar veriga obišče stanje s_j na k-tem koraku. Slučajna spremenljivka $N_n(s_j)$ pa pomeni število obiskov stanaja s_j v časih od 0 do n. Ker je pogojno matematično upanje enako $E(\xi_k(s_j)|X_0 = s_i) = p_{ij}^{(k)}$, velja izrek

Povprečja časov ustavljanja

Pri nekem stanju $s_j \in S$ postavimo

$$\xi_k(s_j) = \begin{cases} 1, & \text{če je } X_k = s_j; \\ 0, & \text{če je } X_k \neq s_j. \end{cases}$$

in seštejmo $N_n(s_j) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k(s_j)$.
Slučajna spremenljivka $\xi_k(s_j)$ ima vrednost 1 natanko tedaj, kadar veriga obišče stanje s_j na k-tem koraku. Slučajna spremenljivka $N_n(s_j)$ pa pomeni število obiskov stanaja s_j v časih od 0 do n. Ker je pogojno matematično upanje enako $E(\xi_k(s_j)|X_0 = s_i) = p_{ij}^{(k)}$, velja izrek

Izrek

Povprečno število obiskov stanja s_j markovske verige do n-tega koraka pri pogoju, da je veriga začela v stanju s_i, je enako

$$\sum^{n} p_{ij}^{(k)}.$$

Povprečja časov ustavljanja

Pri nekem stanju $s_j \in S$ postavimo

$$\xi_k(s_j) = \begin{cases} 1, & \text{če je } X_k = s_j; \\ 0, & \text{če je } X_k \neq s_j. \end{cases}$$

in seštejmo $N_n(s_j) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k(s_j)$.
Slučajna spremenljivka $\xi_k(s_j)$ ima vrednost 1 natanko tedaj, kadar veriga obišče stanje s_j na k-tem koraku. Slučajna spremenljivka $N_n(s_j)$ pa pomeni število obiskov stanaja s_j v časih od 0 do n. Ker je pogojno matematično upanje enako $E(\xi_k(s_j)|X_0 = s_i) = p_{ij}^{(k)}$, velja izrek

Izrek

Povprečno število obiskov stanja s_j markovske verige do n-tega koraka pri pogoju, da je veriga začela v stanju s_i, je enako

$$\sum^{n} p_{ij}^{(k)}.$$

Povprečno število obiskov nekega stanja

Odslej bomo privzeli, da je veriga nerazcepna. Tedaj so bodisi vsa stanja minljiva bodisi so vsa povrnljiva. V slednjem primeru pravimo, da je nerazcepna veriga povrnljiva.

Označimo z $\rho_k(s_i)$ povprečno število obiskov verige stanja s_k med dvema zaporednima obiskoma stanja s_i. Po definiciji naj bo $\rho_k(s_k) = 1$. Ker so vsa stanja povrnljiva, je čas T_{ii} prve vrnitve v stanje s_i vselej slučajna spremenljivka, katere matematično upanje (končno ali neskončno) označimo z m_i.

Povprečno število obiskov nekega stanja

Odslej bomo privzeli, da je veriga nerazcepna. Tedaj so bodisi vsa stanja minljiva bodisi so vsa povrnljiva. V slednjem primeru pravimo, da je nerazcepna veriga povrnljiva.
Označimo z $\rho_k(s_i)$ povprečno število obiskov verige stanja s_k med dvema zaporednima obiskoma stanja s_i. Po definiciji naj bo $\rho_k(s_k) = 1$. Ker so vsa stanja povrnljiva, je čas T_{ii} prve vrnitve v stanje s_i vselej slučajna spremenljivka, katere matematično upanje (končno ali neskončno) označimo z m_i.

Izrek

V povrnljivi nerazcepni verigi velja za poljubno stanje s_k:

- $m_k = E(T_{kk}) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{kk}^{(n)} = \sum_{i \in S} \rho_i(s_k)$
- *Za poljubno nadaljnje stanje s_i je povprečje $\rho_k(s_i)$ končno.*
- *Če z $\rho(s_i)$ označimo vrstico, katere komponente so enake $(\rho_k(s_i))$, potem je ta vrstica levi lastni vektor matrike P.*

Povprečno število obiskov nekega stanja

Odslej bomo privzeli, da je veriga nerazcepna. Tedaj so bodisi vsa stanja minljiva bodisi so vsa povrnljiva. V slednjem primeru pravimo, da je nerazcepna veriga povrnljiva.
Označimo z $\rho_k(s_i)$ povprečno število obiskov verige stanja s_k med dvema zaporednima obiskoma stanja s_i. Po definiciji naj bo $\rho_k(s_k) = 1$. Ker so vsa stanja povrnljiva, je čas T_{ii} prve vrnitve v stanje s_i vselej slučajna spremenljivka, katere matematično upanje (končno ali neskončno) označimo z m_i.

Izrek

V povrnljivi nerazcepni verigi velja za poljubno stanje s_k:

- $m_k = E(T_{kk}) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{kk}^{(n)} = \sum_{i \in S} \rho_i(s_k)$
- *Za poljubno nadaljnje stanje s_i je povprečje $\rho_k(s_i)$ končno.*
- *Če z $\rho(s_i)$ označimo vrstico, katere komponente so enake $(\rho_k(s_i))$, potem je ta vrstica levi lastni vektor matrike P.*

Povprečno število obiskov — nadaljevanje

V dokazu tega izreka se spomnimo časa zadnjega izhoda; z $g_{ik}(n)$ smo označili verjetnost dogodka, da veriga pride v n korakih iz stanja s_i v stanje s_k brez vmesnih obiskov stanja s_i. Najprej dobimo

$$\rho_k(s_i) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{ik}(m), \tag{1}$$

saj moramo za vse obiske stanja s_k (brez obiskov stanja s_i) sešteti verjetnosti teh obiskov po vseh možnih časih.

Povprečno število obiskov — nadaljevanje

V dokazu tega izreka se spomnimo časa zadnjega izhoda; z $g_{ik}(n)$ smo označili verjetnost dogodka, da veriga pride v n korakih iz stanja s_i v stanje s_k brez vmesnih obiskov stanja s_i. Najprej dobimo

$$\rho_k(s_i) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{ik}(m), \tag{1}$$

saj moramo za vse obiske stanja s_k (brez obiskov stanja s_i) sešteti verjetnosti teh obiskov po vseh možnih časih.

Ker pa pri poljubnih časih m in n velja $f_{ii}(m+n) \geqslant g_{ik}(m) f_{ki}(n)$ in lahko čas n izberemo tako, da je $f_{ki}(n) > 0$, dobimo iz enakosti (1), da je

$$\rho_k(s_i) \leqslant \frac{1}{f_{ki}(n)} \sum_{m=1}^{\infty} f_{ii}(m+n) \leqslant \frac{1}{f_{ki}(n)} < \infty.$$

Povprečno število obiskov — nadaljevanje

V dokazu tega izreka se spomnimo časa zadnjega izhoda; z $g_{ik}(n)$ smo označili verjetnost dogodka, da veriga pride v n korakih iz stanja s_i v stanje s_k brez vmesnih obiskov stanja s_i.
Najprej dobimo

$$\rho_k(s_i) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{ik}(m), \tag{1}$$

saj moramo za vse obiske stanja s_k (brez obiskov stanja s_i) sešteti verjetnosti teh obiskov po vseh možnih časih.
Ker pa pri poljubnih časih m in n velja $f_{ii}(m+n) \geqslant g_{ik}(m) f_{ki}(n)$ in lahko čas n izberemo tako, da je $f_{ki}(n) > 0$, dobimo iz enakosti (1), da je

$$\rho_k(s_i) \leqslant \frac{1}{f_{ki}(n)} \sum_{m=1}^{\infty} f_{ii}(m+n) \leqslant \frac{1}{f_{ki}(n)} < \infty.$$

Povprečno število obiskov — zaključek

Uporabimo formulo o popolni verjetnosti glede na vrednosti slučajne spremenljivke X_{n-1}, da dobimo

$$g_{ik}(n) = \sum_{j \neq i} g_{ij}(n-1) p_{jk}$$

pri $n \geqslant 2$, pri $n = 1$ pa imamo $g_{ik}(1) = p_{ik}$. Dobljene enakosti seštejemo po vseh n in uporabimo enakost (1), da dobimo

$$\rho_k(s_i) = p_{ik} + \sum_{j \neq i} \left(\sum_{n \geqslant 2} g_{ij}(n-1) \right) p_{jk} = \rho_i(s_i) p_{ik} + \sum_{j \neq i} \rho_j(s_i) p_{jk}.$$

Povprečno število obiskov — zaključek

Uporabimo formulo o popolni verjetnosti glede na vrednosti slučajne spremenljivke X_{n-1}, da dobimo

$$g_{ik}(n) = \sum_{j \neq i} g_{ij}(n-1) p_{jk}$$

pri $n \geqslant 2$, pri $n = 1$ pa imamo $g_{ik}(1) = p_{ik}$. Dobljene enakosti seštejemo po vseh n in uporabimo enakost (1), da dobimo

$$\rho_k(s_i) = p_{ik} + \sum_{j \neq i} \left(\sum_{n \geqslant 2} g_{ij}(n-1) \right) p_{jk} = \rho_i(s_i) p_{ik} + \sum_{j \neq i} \rho_j(s_i) p_{jk}.$$

Tako smo dokazali izrek.

Povprečno število obiskov — zaključek

Uporabimo formulo o popolni verjetnosti glede na vrednosti slučajne spremenljivke X_{n-1}, da dobimo

$$g_{ik}(n) = \sum_{j \neq i} g_{ij}(n-1) p_{jk}$$

pri $n \geqslant 2$, pri $n = 1$ pa imamo $g_{ik}(1) = p_{ik}$. Dobljene enakosti seštejemo po vseh n in uporabimo enakost (1), da dobimo

$$\rho_k(s_i) = p_{ik} + \sum_{j \neq i} \left(\sum_{n \geqslant 2} g_{ij}(n-1) \right) p_{jk} = \rho_i(s_i) p_{ik} + \sum_{j \neq i} \rho_j(s_i) p_{jk}.$$

Tako smo dokazali izrek.

Matematično upanje časa prve vrnitve

Z m_k smo označili (končno ali neskončno) matematično upanje časa prve vrnitve v stanje s_k. Markovska veriga, začeta v stanju s_k, bo v povprečju prebila na vsakem koraku m_k^{-1} časa v stanju s_k. Ker obišče veriga stanje s_k poljubno mnogokrat, je to povprečje neodvisno od začetnega stanja.

Če upoštevamo še dejstvo, da je povprečno število obiskov stanja s_j markovske verige do n-tega koraka pri pogoju, da je veriga začela v stanju s_i, enako $\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)}$, dobimo tale izrek:

Matematično upanje časa prve vrnitve

Z m_k smo označili (končno ali neskončno) matematično upanje časa prve vrnitve v stanje s_k. Markovska veriga, začeta v stanju s_k, bo v povprečju prebila na vsakem koraku m_k^{-1} časa v stanju s_k. Ker obišče veriga stanje s_k poljubno mnogokrat, je to povprečje neodvisno od začetnega stanja.
Če upoštevamo še dejstvo, da je povprečno število obiskov stanja s_j markovske verige do n-tega koraka pri pogoju, da je veriga začela v stanju s_i, enako $\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)}$, dobimo tale izrek:

Izrek

Za poljubni stanji s_i in s_j velja: $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{m_j}.$$

Matematično upanje časa prve vrnitve

Z m_k smo označili (končno ali neskončno) matematično upanje časa prve vrnitve v stanje s_k. Markovska veriga, začeta v stanju s_k, bo v povprečju prebila na vsakem koraku m_k^{-1} časa v stanju s_k. Ker obišče veriga stanje s_k poljubno mnogokrat, je to povprečje neodvisno od začetnega stanja.
Če upoštevamo še dejstvo, da je povprečno število obiskov stanja s_j markovske verige do n-tega koraka pri pogoju, da je veriga začela v stanju s_i, enako $\sum_{k=0}^n p_{ij}^{(k)}$, dobimo tale izrek:

Izrek

Za poljubni stanji s_i in s_j velja:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{m_j}.$$

Korektno dokažemo ta izrek npr. z Zakonom velikih števil.

Matematično upanje časa prve vrnitve

Z m_k smo označili (končno ali neskončno) matematično upanje časa prve vrnitve v stanje s_k. Markovska veriga, začeta v stanju s_k, bo v povprečju prebila na vsakem koraku m_k^{-1} časa v stanju s_k. Ker obišče veriga stanje s_k poljubno mnogokrat, je to povprečje neodvisno od začetnega stanja.

Če upoštevamo še dejstvo, da je povprečno število obiskov stanja s_j markovske verige do n-tega koraka pri pogoju, da je veriga začela v stanju s_i, enako $\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)}$, dobimo tale izrek:

Izrek

Za poljubni stanji s_i in s_j velja: $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{m_j}.$$

Korektno dokažemo ta izrek npr. z Zakonom velikih števil.

Obstoj stacionarne rešitve

Povrnljivo stanje imenujemo *povrnljivo neničelno*, če ima končno matematično upanje in *povrnljivo ničelno* sicer. Analogna termina vpeljemo za nerazcepno verigo.

Izrek

Za nerazcepno verigo velja:

- *Če je veriga povrnljiva, ima njena prehodna matrika P pozitivni levi lastni vektor pri lastni vrednosti 1, ki je do multiplikativne konstante enoličen.*
- *Če je veriga povrnljiva, je neničelna natanko tedaj, kadar je vrsta iz koeficientov lastnega vektorja konvergentna.*
- *Edini levi lastni vektor prehodne matrike povrnljivo neničelne verige je enak vektorju, ki ima na mestu stanja s_i vrednost m_i^{-1}.*
- *Stacionarna porazdelitev nerazcepne verige obstaja natanko tedaj kadar je veriga povrnljiva neničelna.*

Obstoj stacionarne rešitve

Povrnljivo stanje imenujemo *povrnljivo neničelno*, če ima končno matematično upanje in *povrnljivo ničelno* sicer. Analogna termina vpeljemo za nerazcepno verigo.

Izrek

Za nerazcepno verigo velja:

- *Če je veriga povrnljiva, ima njena prehodna matrika P pozitivni levi lastni vektor pri lastni vrednosti* 1, *ki je do multiplikativne konstante enoličen.*
- *Če je veriga povrnljiva, je neničelna natanko tedaj, kadar je vrsta iz koeficientov lastnega vektorja konvergentna.*
- *Edini levi lastni vektor prehodne matrike povrnljivo neničelne verige je enak vektorju, ki ima na mestu stanja s_i vrednost m_i^{-1}.*
- *Stacionarna porazdelitev nerazcepne verige obstaja natanko tedaj kadar je veriga povrnljiva neničelna.*

Obstoj stacionarne rešitve — nadaljevanje

V prvi točki izreka je levi lastni vektor kar $\rho(s_i)$. Enoličnost dokažemo s pomočjo prejšnjega izreka, od tod pa potem sledi še tretja točka. Iz enoličnosti sledi tudi druga točka.

V dokazu četrte točke je zdaj obstoj stacionarne rešitve že dokazan. V obratno smer najprej privzemimo, da je veriga minljiva. V tem primeru je $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0$ in zato konvergira

$$m_j^{-1} = \sum_{i\in S} m_i^{-1} p_{ij}(n)$$

z rastočim n proti 0 v protislovju s prejšnjim.

Obstoj stacionarne rešitve — nadaljevanje

V prvi točki izreka je levi lastni vektor kar $\rho(s_i)$. Enoličnost dokažemo s pomočjo prejšnjega izreka, od tod pa potem sledi še tretja točka. Iz enoličnosti sledi tudi druga točka.

V dokazu četrte točke je zdaj obstoj stacionarne rešitve že dokazan. V obratno smer najprej privzemimo, da je veriga minljiva. V tem primeru je $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0$ in zato konvergira

$$m_j^{-1} = \sum_{i\in S} m_i^{-1} p_{ij}(n)$$

z rastočim n proti 0 v protislovju s prejšnjim.

Če pa je veriga povrnljiva, uporabimo drugo in tretjo točko izreka. Med drugim dobimo iz obstoja stacionarne rešitve povrnljivo neničelnost verige.

Obstoj stacionarne rešitve — nadaljevanje

V prvi točki izreka je levi lastni vektor kar $\rho(s_i)$. Enoličnost dokažemo s pomočjo prejšnjega izreka, od tod pa potem sledi še tretja točka. Iz enoličnosti sledi tudi druga točka.
V dokazu četrte točke je zdaj obstoj stacionarne rešitve že dokazan. V obratno smer najprej privzemimo, da je veriga minljiva. V tem primeru je $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0$ in zato konvergira

$$m_j^{-1} = \sum_{i\in S} m_i^{-1} p_{ij}(n)$$

z rastočim n proti 0 v protislovju s prejšnjim.
Če pa je veriga povrnljiva, uporabimo drugo in tretjo točko izreka. Med drugim dobimo iz obstoja stacionarne rešitve povrnljivo neničelnost verige.

Periodičnost

Za poljubno (povrnljivo) stanje s_i vpeljemo pojem *periode*; to je

$$d(i) = d\{n | p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Stanje je *periodično*, če je $d(i) > 1$ in *aperiodično* sicer.

Izrek

V nerazcepni verigi so bodisi vsa stanja aperiodična bodisi so vsa periodična in imajo isto periodo d.

Periodičnost

Za poljubno (povrnljivo) stanje s_i vpeljemo pojem *periode*; to je

$$d(i) = d\{n | p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Stanje je *periodično*, če je $d(i) > 1$ in *aperiodično* sicer.

Izrek

V nerazcepni verigi so bodisi vsa stanja aperiodična bodisi so vsa periodična in imajo isto periodo d.

Nerazcepno verigo poimenujemo v drugem primeru *aciklično*, v prvem pa *ciklično* s periodo d. Nerazcepno, aciklično, neničelno povrnljivo markovsko verigo poimenujemo *ergodijska veriga*.

Periodičnost

Za poljubno (povrnljivo) stanje s_i vpeljemo pojem *periode*; to je

$$d(i) = d\{n | p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Stanje je *periodično*, če je $d(i) > 1$ in *aperiodično* sicer.

Izrek

V nerazcepni verigi so bodisi vsa stanja aperiodična bodisi so vsa periodična in imajo isto periodo d.

Nerazcepno verigo poimenujemo v drugem primeru *aciklično*, v prvem pa *ciklično* s periodo d. Nerazcepno, aciklično, neničelno povrnljivo markovsko verigo poimenujemo *ergodijska veriga*.

Produkt markovskih verig — 1

Naj bosta $X = \{X_n | n \geqslant 0\}$ in $Y = \{Y_n | n \geqslant 0\}$ dve neodvisni markovski verigi z isto prehodno matriko P. Tvorimo produkt teh verig $Z = X \times Y = \{(X_n, Y_n) | n \geqslant 0\}$ z vrednostmi v množici stanj $S \times S$. Enostavno preverimo, da je dobljeni proces spet markovska veriga, in da so prehodne verjetnosti te verige enake

$$p_{ij,kl} = P(Z_{n+1} = (s_k, s_l) | Z_n = (s_i, s_j)) = p_{ik} p_{jl}$$

zaradi neodvisnosti obeh verig.

Produkt markovskih verig — 1

Naj bosta $X = \{X_n | n \geqslant 0\}$ in $Y = \{Y_n | n \geqslant 0\}$ dve neodvisni markovski verigi z isto prehodno matriko P. Tvorimo produkt teh verig $Z = X \times Y = \{(X_n, Y_n) | n \geqslant 0\}$ z vrednostmi v množici stanj $S \times S$. Enostavno preverimo, da je dobljeni proces spet markovska veriga, in da so prehodne verjetnosti te verige enake

$$p_{ij,kl} = P(Z_{n+1} = (s_k, s_l) | Z_n = (s_i, s_j)) = p_{ik} p_{jl}$$

zaradi neodvisnosti obeh verig.

Izrek

Če sta verigi X in Y obe nerazcepni in aperiodični, potem je taka tudi veriga Z.

Produkt markovskih verig — 1

Naj bosta $X = \{X_n | n \geqslant 0\}$ in $Y = \{Y_n | n \geqslant 0\}$ dve neodvisni markovski verigi z isto prehodno matriko P. Tvorimo produkt teh verig $Z = X \times Y = \{(X_n, Y_n) | n \geqslant 0\}$ z vrednostmi v množici stanj $S \times S$. Enostavno preverimo, da je dobljeni proces spet markovska veriga, in da so prehodne verjetnosti te verige enake

$$p_{ij,kl} = P(Z_{n+1} = (s_k, s_l) | Z_n = (s_i, s_j)) = p_{ik} p_{jl}$$

zaradi neodvisnosti obeh verig.

Izrek

Če sta verigi X in Y obe nerazcepni in aperiodični, potem je taka tudi veriga Z.

Produkt markovskih verig — 2

Izrek (Limitni izrek za nerazcepno verigo)

Za nerazcepno aciklično verigo velja

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{m_j},$$

ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j, neodvisno od začetnega stanja s_i.

Najprej obravnavajmo primer, ko je X povrnljiva neničelna. Tedaj ima X stacionarno porazdelitev π, veriga Z ima stacionarno porazdelitev $\nu = \pi \times \pi$ in tudi Z je povrnljiva neničelna. Naj bo $X_0 = s_i$ in $Y_0 = s_j$ pri poljubnih stanjih $s_i, s_j \in S$. Naj bo $D = \{(s, s)\} \subset S \times S$ in T čas prvega prehoda iz začetnega stanja v D. Preprosto je premisliti, da sta verigi X_n in Y_n za vsak $n \geqslant T$ enako porazdeljeni. Točneje:

Produkt markovskih verig — 2

Izrek (Limitni izrek za nerazcepno verigo)

Za nerazcepno aciklično verigo velja

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{m_j},$$

ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j, neodvisno od začetnega stanja s_i.

Najprej obravnavajmo primer, ko je X povrnljiva neničelna. Tedaj ima X stacionarno porazdelitev π, veriga Z ima stacionarno porazdelitev $\nu = \pi \times \pi$ in tudi Z je povrnljiva neničelna. Naj bo $X_0 = s_i$ in $Y_0 = s_j$ pri poljubnih stanjih $s_i, s_j \in S$. Naj bo $D = \{(s, s)\} \subset S \times S$ in T čas prvega prehoda iz začetnega stanja v D. Preprosto je premisliti, da sta verigi X_n in Y_n za vsak $n \geqslant T$ enako porazdeljeni. Točneje:

Produkt markovskih verig — 3

$$p_{ik}^{(n)} = P(X_n = s_k)) = P(X_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) =$$

$$= P(Y_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) \leqslant$$

$$\leqslant P(Y_n = s_k)) + P(T > n)) = p_{jk}^{(n)} + P(T > n))$$

Ker lahko vlogi obeh verig zamenjamo, dobimo od tod

$$|p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| \leqslant P(T > n)) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Produkt markovskih verig — 3

$$p_{ik}^{(n)} = P(X_n = s_k)) = P(X_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) =$$

$$= P(Y_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) \leqslant$$

$$\leqslant P(Y_n = s_k)) + P(T > n)) = p_{jk}^{(n)} + P(T > n))$$

Ker lahko vlogi obeh verig zamenjamo, dobimo od tod

$$|p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| \leqslant P(T > n)) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Limita bo torej neodvisna od začetnega stanja, če le dokažemo njen obstoj. V ta namen pokažimo, da velja

$$m_k^{-1} - p_{jk}^{(n)} \leqslant \sum_i m_i^{-1}(p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}) \xrightarrow{n \to \infty} 0. \qquad (2)$$

Produkt markovskih verig — 3

$$p_{ik}^{(n)} = P(X_n = s_k)) = P(X_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) =$$

$$= P(Y_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) \leqslant$$

$$\leqslant P(Y_n = s_k)) + P(T > n)) = p_{jk}^{(n)} + P(T > n))$$

Ker lahko vlogi obeh verig zamenjamo, dobimo od tod

$$|p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| \leqslant P(T > n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Limita bo torej neodvisna od začetnega stanja, če le dokažemo njen obstoj. V ta namen pokažimo, da velja

$$m_k^{-1} - p_{jk}^{(n)} \leqslant \sum_i m_i^{-1}(p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (2)$$

Produkt markovskih verig — 4

Da bi dokazali veljavnost te ocene, izberimo poljubno končno množico $F \subset S$ in ocenimo

$$\sum_{s_i} m_i^{-1} |p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| \leqslant \sum_{s_i \in F} |p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| + 2 \sum_{s_i \notin F} m_i^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} 2 \sum_{s_i \notin F} m_i^{-1}.$$

Obravnavajmo še primer, ko je X povrnljiva ničelna in znotraj tega podprimer, da je veriga Z minljiva. Tedaj je

$$P(Z_n = (j,j) | Z_0 = (i,i)) = \left(p_{ij}^{(n)}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

in izrek velja. Drugi podprimer, da je Z povrnljiva neničelna, nas preko premisleka, da čas prve vrnitve verige Z v stanje (s_i, s_i) ne more biti manjši od časa prve vrnitve verige X v stanje s_i, pripelje v protislovje z dejstvom, da ima prvi od teh časov končno matematično upanje, drugi pa neskončnega.

Produkt markovskih verig — 4

Da bi dokazali veljavnost te ocene, izberimo poljubno končno množico $F \subset S$ in ocenimo

$$\sum_{s_i} m_i^{-1}|p_{ik}^{(n)}-p_{jk}^{(n)}| \leqslant \sum_{s_i\in F} |p_{ik}^{(n)}-p_{jk}^{(n)}|+2\sum_{s_i\notin F} m_i^{-1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\sum_{s_i\notin F} m_i^{-1}.$$

Obravnavajmo še primer, ko je X povrnljiva ničelna in znotraj tega podprimer, da je veriga Z minljiva. Tedaj je

$$P(Z_n=(j,j)|Z_0=(i,i)) = \left(p_{ij}^{(n)}\right)^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

in izrek velja. Drugi podprimer, da je Z povrnljiva neničelna, nas preko premisleka, da čas prve vrnitve verige Z v stanje (s_i,s_i) ne more biti manjši od časa prve vrnitve verige X v stanje s_i, pripelje v protislovje z dejstvom, da ima prvi od teh časov končno matematično upanje, drugi pa neskončnega.

Produkt markovskih verig — 5

Ostane nam še tretji podprimer, da je Z povrnljivo ničelna. Najprej opazimo, da še zmerom velja (2) in od tod bi želeli zaključiti, da je $p_{ij}^{(n)} \to 0$, ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j. Nasprotni privzetek nas pripelje preko Cantorjevega diagonalizacijskega postopka do podzaporedja $n_1, n_2, \ldots$, pri katerem velja

$$p_{ij}^{(n_r)} \xrightarrow{r\to\infty} \alpha_j, \tag{3}$$

za vsa stanja s_i in s_j. Tu so vsi α_j neodvisni od i in niso vsi enaki 0. Za poljubno končno podmnožico $F \subset S$ je

$$\sum_{s_j \in F} \alpha_j = \lim_{r\to\infty} \sum_{s_j \in F} p_{ij}^{(n_r)} \leqslant 1,$$

torej leži $\alpha = \sum_{s_j} \alpha_j$ na intervalu $(0, 1]$.

Produkt markovskih verig — 5

Ostane nam še tretji podprimer, da je Z povrnljivo ničelna. Najprej opazimo, da še zmerom velja (2) in od tod bi želeli zaključiti, da je $p_{ij}^{(n)} \to 0$, ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j. Nasprotni privzetek nas pripelje preko Cantorjevega diagonalizacijskega postopka do podzaporedja $n_1, n_2, \ldots$, pri katerem velja

$$p_{ij}^{(n_r)} \xrightarrow{r\to\infty} \alpha_j, \tag{3}$$

za vsa stanja s_i in s_j. Tu so vsi α_j neodvisni od i in niso vsi enaki 0. Za poljubno končno podmnožico $F \subset S$ je

$$\sum_{s_j \in F} \alpha_j = \lim_{r\to\infty} \sum_{s_j \in F} p_{ij}^{(n_r)} \leqslant 1,$$

torej leži $\alpha = \sum_{s_j} \alpha_j$ na intervalu $(0, 1]$.

Opazimo še:

Produkt markovskih verig — 5

Ostane nam še tretji podprimer, da je Z povrnljivo ničelna. Najprej opazimo, da še zmerom velja (2) in od tod bi želeli zaključiti, da je $p_{ij}^{(n)} \to 0$, ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j. Nasprotni privzetek nas pripelje preko Cantorjevega diagonalizacijskega postopka do podzaporedja $n_1, n_2, \ldots$, pri katerem velja

$$p_{ij}^{(n_r)} \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_j, \tag{3}$$

za vsa stanja s_i in s_j. Tu so vsi α_j neodvisni od i in niso vsi enaki 0. Za poljubno končno podmnožico $F \subset S$ je

$$\sum_{s_j \in F} \alpha_j = \lim_{r\to\infty} \sum_{s_j \in F} p_{ij}^{(n_r)} \leqslant 1,$$

torej leži $\alpha = \sum_{s_j} \alpha_j$ na intervalu $(0, 1]$.
Opazimo še:

Produkt markovskih verig — 6

$$\sum_{s_k \in F} p_{ik}^{(n_r)} p_{kj} \leqslant p_{ij}^{(n_r+1)} = \sum_{s_k} p_{ik} p_{kj}^{(n_r)}.$$

Ko pošljemo r proti neskončno, uporabimo (3) in še podoben trik kot v dokazu ocene (2), dobimo od tod najprej

$$\sum_{s_k \in F} \alpha_k p_{kj} \leqslant \sum_{s_k} p_{ik} \alpha_j = \alpha_j,$$

in od tod

$$\sum_{s_k} \alpha_k p_{kj} \leqslant \alpha_j.$$

Preprost premislek (npr s protislovjem) pa nas prepriča, da mora v tej oceni v resnici veljati enačaj.

Produkt markovskih verig — 6

$$\sum_{s_k \in F} p_{ik}^{(n_r)} p_{kj} \leqslant p_{ij}^{(n_r+1)} = \sum_{s_k} p_{ik} p_{kj}^{(n_r)}.$$

Ko pošljemo r proti neskončno, uporabimo (3) in še podoben trik kot v dokazu ocene (2), dobimo od tod najprej

$$\sum_{s_k \in F} \alpha_k p_{kj} \leqslant \sum_{s_k} p_{ik} \alpha_j = \alpha_j,$$

in od tod

$$\sum_{s_k} \alpha_k p_{kj} \leqslant \alpha_j.$$

Preprost premislek (npr s protislovjem) pa nas prepriča, da mora v tej oceni v resnici veljati enačaj.

To dejstvo pa nas pripelje do stacionarne porazdelitve $\pi_j = \alpha^{-1} \alpha_j$ v nasprotju z ničelno povrnljivostjo verige X.

Produkt markovskih verig — 6

$$\sum_{s_k \in F} p_{ik}^{(n_r)} p_{kj} \leqslant p_{ij}^{(n_r+1)} = \sum_{s_k} p_{ik} p_{kj}^{(n_r)}.$$

Ko pošljemo r proti neskončno, uporabimo (3) in še podoben trik kot v dokazu ocene (2), dobimo od tod najprej

$$\sum_{s_k \in F} \alpha_k p_{kj} \leqslant \sum_{s_k} p_{ik} \alpha_j = \alpha_j,$$

in od tod

$$\sum_{s_k} \alpha_k p_{kj} \leqslant \alpha_j.$$

Preprost premislek (npr s protislovjem) pa nas prepriča, da mora v tej oceni v resnici veljati enačaj.
To dejstvo pa nas pripelje do stacionarne porazdelitve $\pi_j = \alpha^{-1} \alpha_j$ v nasprotju z ničelno povrnljivostjo verige X.

Ciklične verige

Izrek

Izberimo poljubni stanji s_i in s_j iz nerazcepne ciklične verige s periodo d. Tedaj imajo vsa naravna števila n z lastnostjo $p_{ij}^{(n)} > 0$ isti ostanek pri deljenju z d.

Naj bosta m in n dve števili s to lastnostjo, število k pa naj bo tako, da je $p_{ji}^{(k)} > 0$. Tedaj je $p_{ii}^{(n+k)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)} > 0$. Zato je $n + k$ deljiv z d in podobno je $m + k$ deljiv z d. Od tod dobimo, da je tudi njuna razlika $m - n = (m + k) - (n + k)$ deljiva z d.

Ciklične verige

Izrek

Izberimo poljubni stanji s_i in s_j iz nerazcepne ciklične verige s periodo d. Tedaj imajo vsa naravna števila n z lastnostjo $p_{ij}^{(n)} > 0$ isti ostanek pri deljenju z d.

Naj bosta m in n dve števili s to lastnostjo, število k pa naj bo tako, da je $p_{ji}^{(k)} > 0$. Tedaj je $p_{ii}^{(n+k)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)} > 0$. Zato je $n + k$ deljiv z d in podobno je $m + k$ deljiv z d. Od tod dobimo, da je tudi njuna razlika $m - n = (m + k) - (n + k)$ deljiva z d.

Izrek

Za nerazcepno ciklično verigo s periodo d obstajajo disjunktne množice stanj $S_0, S_1, \ldots, S_{d-1}$, za katere velja, da pri poljubnem $s_i \in S_0$ in $s_j \in S_k$ iz $p_{ij}^{(n)} > 0$ pri nekem n sledi, da je k ostanek pri deljenju števila n z d.

Ciklične verige

Izrek

Izberimo poljubni stanji s_i in s_j iz nerazcepne ciklične verige s periodo d. Tedaj imajo vsa naravna števila n z lastnostjo $p_{ij}^{(n)} > 0$ isti ostanek pri deljenju z d.

Naj bosta m in n dve števili s to lastnostjo, število k pa naj bo tako, da je $p_{ji}^{(k)} > 0$. Tedaj je $p_{ii}^{(n+k)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)} > 0$. Zato je $n+k$ deljiv z d in podobno je $m+k$ deljiv z d. Od tod dobimo, da je tudi njuna razlika $m-n=(m+k)-(n+k)$ deljiva z d.

Izrek

Za nerazcepno ciklično verigo s periodo d obstajajo disjunktne množice stanj $S_0, S_1, \ldots, S_{d-1}$, za katere velja, da pri poljubnem $s_i \in S_0$ in $s_j \in S_k$ iz $p_{ij}^{(n)} > 0$ pri nekem n sledi, da je k ostanek pri deljenju števila n z d.

Ciklične verige — nadaljevanje

Drugače povedano: Veriga gre iz nekega stanja iz S_0 v enem koraku v stanje iz S_1, iz nekega stanja iz S_1 gre v stanje iz S_2 in tako naprej do S_{d-1}, od tod pa se spet vrne v S_0. Verigi lahko priredimo d verig X_{nd+k}, ki so ergodijske in za vsako od njih velja prejšnji limitni izrek.

Izrek (Limitni izrek za ciklično verigo)

Za nerazcepno ciklično verigo s periodo d velja

$$p_{ij}^{(nd+k)} \to \frac{d}{m_j},$$

Ciklične verige — nadaljevanje

Drugače povedano: Veriga gre iz nekega stanja iz S_0 v enem koraku v stanje iz S_1, iz nekega stanja iz S_1 gre v stanje iz S_2 in tako naprej do S_{d-1}, od tod pa se spet vrne v S_0. Verigi lahko priredimo d verig X_{nd+k}, ki so ergodijske in za vsako od njih velja prejšnji limitni izrek.

Izrek (Limitni izrek za ciklično verigo)

Za nerazcepno ciklično verigo s periodo d velja

$$p_{ij}^{(nd+k)} \longrightarrow \frac{d}{m_j},$$

ko gre $n \longrightarrow \infty$ za vsa stanja s_i in s_j z lastnostjo, da da število korakov, potrebnih za prehod iz s_i v s_j pri deljenju z d ostanek k. V vseh ostalih primerih je ta limita enaka 0, vselej pa je neodvisna od začetnega stanja s_i.

Ciklične verige — nadaljevanje

Drugače povedano: Veriga gre iz nekega stanja iz S_0 v enem koraku v stanje iz S_1, iz nekega stanja iz S_1 gre v stanje iz S_2 in tako naprej do S_{d-1}, od tod pa se spet vrne v S_0. Verigi lahko priredimo d verig X_{nd+k}, ki so ergodijske in za vsako od njih velja prejšnji limitni izrek.

Izrek (Limitni izrek za ciklično verigo)

Za nerazcepno ciklično verigo s periodo d velja

$$p_{ij}^{(nd+k)} \longrightarrow \frac{d}{m_j},$$

ko gre $n \longrightarrow \infty$ za vsa stanja s_i in s_j z lastnostjo, da da število korakov, potrebnih za prehod iz s_i v s_j pri deljenju z d ostanek k. V vseh ostalih primerih je ta limita enaka 0, vselej pa je neodvisna od začetnega stanja s_i.

Splošne verige

Spomnimo se fundamentalnega strukturnega izreka za markovske verige. Če množico stanj razdelimo na disjunktne podmnožice M vseh minljivih stanj ter ekvivalenčne razrede povrnljivih stanj S_1, S_2, S_3, dobimo v prirejenem bložnem zapisu prehodno matriko P v bločni zgornji trikotni obliki;

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & * & * & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ko računamo potence te matrike, se zgornje trikotna oblika ohranja

Splošne verige

Spomnimo se fundamentalnega strukturnega izreka za markovske verige. Če množico stanj razdelimo na disjunktne podmnožice M vseh minljivih stanj ter ekvivalenčne razrede povrnljivih stanj S_1, S_2, S_3, dobimo v prirejenem bložnem zapisu prehodno matriko P v bločni zgornji trikotni obliki;

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & * & * & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ko računamo potence te matrike, se zgornje trikotna oblika ohranja

$$P^n = \begin{pmatrix} P_0^n & * & * & \cdots \\ 0 & P_1^n & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Splošne verige

Spomnimo se fundamentalnega strukturnega izreka za markovske verige. Če množico stanj razdelimo na disjunktne podmnožice M vseh minljivih stanj ter ekvivalenčne razrede povrnljivih stanj S_1, S_2, S_3, dobimo v prirejenem bložnem zapisu prehodno matriko P v bločni zgornji trikotni obliki;

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & * & * & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ko računamo potence te matrike, se zgornje trikotna oblika ohranja

$$P^n = \begin{pmatrix} P_0^n & * & * & \cdots \\ 0 & P_1^n & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$