Verjetnost 2
Tretje poglavje
Limitni izreki

Matjaž Omladič

Oktober 2010

Vsebina

1 Limitni izreki — nerazcepni primer

2 Splošni limitni izreki

3 Posebnosti v končnem

Periodičnost

Za poljubno (povrnljivo) stanje s_i vpeljemo pojem *periode*; to je

$$d(i) = d\{n | p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Stanje je *periodično*, če je $d(i) > 1$ in *aperiodično* sicer.

Izrek

V nerazcepni verigi so bodisi vsa stanja aperiodična bodisi so vsa periodična in imajo isto periodo d.

Periodičnost

Za poljubno (povrnljivo) stanje s_i vpeljemo pojem *periode*; to je

$$d(i) = d\{n | p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Stanje je *periodično*, če je $d(i) > 1$ in *aperiodično* sicer.

Izrek

V nerazcepni verigi so bodisi vsa stanja aperiodična bodisi so vsa periodična in imajo isto periodo d.

Nerazcepno verigo poimenujemo v drugem primeru *aciklično*, v prvem pa *ciklično* s periodo d. Nerazcepno, aciklično, neničelno povrnljivo markovsko verigo poimenujemo *ergodijska veriga*.

Periodičnost

Za poljubno (povrnljivo) stanje s_i vpeljemo pojem *periode*; to je

$$d(i) = d\{n|p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Stanje je *periodično*, če je $d(i) > 1$ in *aperiodično* sicer.

Izrek

V nerazcepni verigi so bodisi vsa stanja aperiodična bodisi so vsa periodična in imajo isto periodo d.

Nerazcepno verigo poimenujemo v drugem primeru *aciklično*, v prvem pa *ciklično* s periodo d. Nerazcepno, aciklično, neničelno povrnljivo markovsko verigo poimenujemo *ergodijska veriga*.

Produkt markovskih verig — 1

Naj bosta $X = \{X_n | n \geqslant 0\}$ in $Y = \{Y_n | n \geqslant 0\}$ dve neodvisni markovski verigi z isto prehodno matriko P. Tvorimo produkt teh verig $Z = X \times Y = \{(X_n, Y_n) | n \geqslant 0\}$ z vrednostmi v množici stanj $S \times S$. Enostavno preverimo, da je dobljeni proces spet markovska veriga, in da so prehodne verjetnosti te verige enake

$$p_{ij,kl} = P(Z_{n+1} = (s_k, s_l) | Z_n = (s_i, s_j)) = p_{ik} p_{jl}$$

zaradi neodvisnosti obeh verig.

Produkt markovskih verig — 1

Naj bosta $X = \{X_n | n \geqslant 0\}$ in $Y = \{Y_n | n \geqslant 0\}$ dve neodvisni markovski verigi z isto prehodno matriko P. Tvorimo produkt teh verig $Z = X \times Y = \{(X_n, Y_n) | n \geqslant 0\}$ z vrednostmi v množici stanj $S \times S$. Enostavno preverimo, da je dobljeni proces spet markovska veriga, in da so prehodne verjetnosti te verige enake

$$p_{ij,kl} = P(Z_{n+1} = (s_k, s_l) | Z_n = (s_i, s_j)) = p_{ik} p_{jl}$$

zaradi neodvisnosti obeh verig.

Izrek

Če sta verigi X in Y obe nerazcepni in aperiodični, potem je taka tudi veriga Z.

Produkt markovskih verig — 1

Naj bosta $X = \{X_n | n \geqslant 0\}$ in $Y = \{Y_n | n \geqslant 0\}$ dve neodvisni markovski verigi z isto prehodno matriko P. Tvorimo produkt teh verig $Z = X \times Y = \{(X_n, Y_n) | n \geqslant 0\}$ z vrednostmi v množici stanj $S \times S$. Enostavno preverimo, da je dobljeni proces spet markovska veriga, in da so prehodne verjetnosti te verige enake

$$p_{ij,kl} = P(Z_{n+1} = (s_k, s_l) | Z_n = (s_i, s_j)) = p_{ik} p_{jl}$$

zaradi neodvisnosti obeh verig.

Izrek

Če sta verigi X in Y obe nerazcepni in aperiodični, potem je taka tudi veriga Z.

Produkt markovskih verig — 2

Izrek (Limitni izrek za nerazcepno verigo)

Za nerazcepno aciklično verigo velja

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{m_j},$$

ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j, neodvisno od začetnega stanja s_i.

Najprej obravnavajmo primer, ko je X povrnljiva neničelna. Tedaj ima X stacionarno porazdelitev π, veriga Z ima stacionarno porazdelitev $\nu = \pi \times \pi$ in tudi Z je povrnljiva neničelna. Naj bo $X_0 = s_i$ in $Y_0 = s_j$ pri poljubnih stanjih $s_i, s_j \in S$. Naj bo $D = \{(s,s)\} \subset S \times S$ in T čas prvega prehoda iz začetnega stanja v D. Preprosto je premisliti, da sta verigi X_n in Y_n za vsak $n \geqslant T$ enako porazdeljeni. Točneje:

Produkt markovskih verig — 2

Izrek (Limitni izrek za nerazcepno verigo)

Za nerazcepno aciklično verigo velja

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{m_j},$$

ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j, neodvisno od začetnega stanja s_i.

Najprej obravnavajmo primer, ko je X povrnljiva neničelna. Tedaj ima X stacionarno porazdelitev π, veriga Z ima stacionarno porazdelitev $\nu = \pi \times \pi$ in tudi Z je povrnljiva neničelna. Naj bo $X_0 = s_i$ in $Y_0 = s_j$ pri poljubnih stanjih $s_i, s_j \in S$. Naj bo $D = \{(s, s)\} \subset S \times S$ in T čas prvega prehoda iz začetnega stanja v D. Preprosto je premisliti, da sta verigi X_n in Y_n za vsak $n \geqslant T$ enako porazdeljeni. Točneje:

Produkt markovskih verig — 3

$$p_{ik}^{(n)} = P(X_n = s_k)) = P(X_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) =$$

$$= P(Y_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) \leqslant$$

$$\leqslant P(Y_n = s_k)) + P(T > n)) = p_{jk}^{(n)} + P(T > n))$$

Ker lahko vlogi obeh verig zamenjamo, dobimo od tod

$$|p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| \leqslant P(T > n)) \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{1}$$

Produkt markovskih verig — 3

$$p_{ik}^{(n)} = P(X_n = s_k)) = P(X_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) =$$

$$= P(Y_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) \leqslant$$

$$\leqslant P(Y_n = s_k)) + P(T > n)) = p_{jk}^{(n)} + P(T > n))$$

Ker lahko vlogi obeh verig zamenjamo, dobimo od tod

$$|p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| \leqslant P(T > n)) \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{1}$$

Limita bo torej neodvisna od začetnega stanja, če le dokažemo njen obstoj. V ta namen pokažimo, da velja

$$m_k^{-1} - p_{jk}^{(n)} = \sum_i m_i^{-1}(p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Produkt markovskih verig — 3

$$p_{ik}^{(n)} = P(X_n = s_k)) = P(X_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) =$$

$$= P(Y_n = s_k), T \leqslant n) + P(X_n = s_k, T > n)) \leqslant$$

$$\leqslant P(Y_n = s_k)) + P(T > n)) = p_{jk}^{(n)} + P(T > n))$$

Ker lahko vlogi obeh verig zamenjamo, dobimo od tod

$$|p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| \leqslant P(T > n)) \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{1}$$

Limita bo torej neodvisna od začetnega stanja, če le dokažemo njen obstoj. V ta namen pokažimo, da velja

$$m_k^{-1} - p_{jk}^{(n)} = \sum_i m_i^{-1} (p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Produkt markovskih verig — 4

Da bi dokazali veljavnost te ocene, izberimo poljubno končno množico $F \subset S$ in ocenimo

$$\sum_{s_i} m_i^{-1} |p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| \leqslant \sum_{s_i \in F} |p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| + 2 \sum_{s_i \notin F} m_i^{-1} \xrightarrow{n \to \infty} 2 \sum_{s_i \notin F} m_i^{-1}.$$

Obravnavajmo še primer, ko je X povrnljiva ničelna in znotraj tega podprimer, da je veriga Z minljiva. Tedaj je

$$P(Z_n = (j,j) | Z_0 = (i,i)) = \left(p_{ij}^{(n)}\right)^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

in izrek velja. Drugi podprimer, da je Z povrnljiva neničelna, nas preko premisleka, da čas prve vrnitve verige Z v stanje (s_i, s_i) ne more biti manjši od časa prve vrnitve verige X v stanje s_i, pripelje v protislovje z dejstvom, da ima prvi od teh časov končno matematično upanje, drugi pa neskončnega.

Produkt markovskih verig — 4

Da bi dokazali veljavnost te ocene, izberimo poljubno končno množico $F \subset S$ in ocenimo

$$\sum_{s_i} m_i^{-1} |p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| \leqslant \sum_{s_i \in F} |p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| + 2 \sum_{s_i \notin F} m_i^{-1} \xrightarrow{n \to \infty} 2 \sum_{s_i \notin F} m_i^{-1}.$$

Obravnavajmo še primer, ko je X povrnljiva ničelna in znotraj tega podprimer, da je veriga Z minljiva. Tedaj je

$$P(Z_n = (j,j) | Z_0 = (i,i)) = \left(p_{ij}^{(n)}\right)^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

in izrek velja. Drugi podprimer, da je Z povrnljiva neničelna, nas preko premisleka, da čas prve vrnitve verige Z v stanje (s_i, s_i) ne more biti manjši od časa prve vrnitve verige X v stanje s_i, pripelje v protislovje z dejstvom, da ima prvi od teh časov končno matematično upanje, drugi pa neskončnega.

Produkt markovskih verig — 5

Ostane nam še tretji podprimer, da je Z povrnljivo ničelna. Najprej opazimo, da še zmerom velja (1) in od tod bi želeli zaključiti, da je $p_{ij}^{(n)} \to 0$, ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j. Nasprotni privzetek nas pripelje preko Cantorjevega diagonalizacijskega postopka do podzaporedja $n_1, n_2, \ldots$, pri katerem velja

$$p_{ij}^{(n_r)} \xrightarrow{r \to \infty} \alpha_j, \tag{2}$$

za vsa stanja s_i in s_j. Tu so vsi α_j neodvisni od i in niso vsi enaki 0. Za poljubno končno podmnožico $F \subset S$ je

$$\sum_{s_j \in F} \alpha_j = \lim_{r \to \infty} \sum_{s_j \in F} p_{ij}^{(n_r)} \leqslant 1,$$

torej leži $\alpha = \sum_{s_j} \alpha_j$ na intervalu $(0, 1]$.

Produkt markovskih verig — 5

Ostane nam še tretji podprimer, da je Z povrnljivo ničelna. Najprej opazimo, da še zmerom velja (1) in od tod bi želeli zaključiti, da je $p_{ij}^{(n)} \to 0$, ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j. Nasprotni privzetek nas pripelje preko Cantorjevega diagonalizacijskega postopka do podzaporedja $n_1, n_2, \ldots$, pri katerem velja

$$p_{ij}^{(n_r)} \xrightarrow{r \to \infty} \alpha_j, \tag{2}$$

za vsa stanja s_i in s_j. Tu so vsi α_j neodvisni od i in niso vsi enaki 0. Za poljubno končno podmnožico $F \subset S$ je

$$\sum_{s_j \in F} \alpha_j = \lim_{r \to \infty} \sum_{s_j \in F} p_{ij}^{(n_r)} \leqslant 1,$$

torej leži $\alpha = \sum_{s_j} \alpha_j$ na intervalu $(0, 1]$.

Opazimo še:

Produkt markovskih verig — 5

Ostane nam še tretji podprimer, da je Z povrnljivo ničelna. Najprej opazimo, da še zmerom velja (1) in od tod bi želeli zaključiti, da je $p_{ij}^{(n)} \to 0$, ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j. Nasprotni privzetek nas pripelje preko Cantorjevega diagonalizacijskega postopka do podzaporedja $n_1, n_2, \ldots$, pri katerem velja

$$p_{ij}^{(n_r)} \xrightarrow{r \to \infty} \alpha_j, \tag{2}$$

za vsa stanja s_i in s_j. Tu so vsi α_j neodvisni od i in niso vsi enaki 0. Za poljubno končno podmnožico $F \subset S$ je

$$\sum_{s_j \in F} \alpha_j = \lim_{r \to \infty} \sum_{s_j \in F} p_{ij}^{(n_r)} \leqslant 1,$$

torej leži $\alpha = \sum_{s_j} \alpha_j$ na intervalu $(0, 1]$.
Opazimo še:

Produkt markovskih verig — 6

$$\sum_{s_k \in F} p_{ik}^{(n_r)} p_{kj} \leqslant p_{ij}^{(n_r+1)} = \sum_{s_k} p_{ik} p_{kj}^{(n_r)}.$$

Ko pošljemo r proti neskončno, uporabimo (2) in še podoben trik kot v dokazu prejšnjih ocen, dobimo od tod najprej

$$\sum_{s_k \in F} \alpha_k p_{kj} \leqslant \sum_{s_k} p_{ik} \alpha_j = \alpha_j,$$

in od tod

$$\sum_{s_k} \alpha_k p_{kj} \leqslant \alpha_j.$$

Preprost premislek (npr s protislovjem) pa nas prepriča, da mora v tej oceni v resnici veljati enačaj.

Produkt markovskih verig — 6

$$\sum_{s_k \in F} p_{ik}^{(n_r)} p_{kj} \leqslant p_{ij}^{(n_r+1)} = \sum_{s_k} p_{ik} p_{kj}^{(n_r)}.$$

Ko pošljemo r proti neskončno, uporabimo (2) in še podoben trik kot v dokazu prejšnjih ocen, dobimo od tod najprej

$$\sum_{s_k \in F} \alpha_k p_{kj} \leqslant \sum_{s_k} p_{ik} \alpha_j = \alpha_j,$$

in od tod

$$\sum_{s_k} \alpha_k p_{kj} \leqslant \alpha_j.$$

Preprost premislek (npr s protislovjem) pa nas prepriča, da mora v tej oceni v resnici veljati enačaj.

To dejstvo pa nas pripelje do stacionarne porazdelitve $\pi_j = \alpha^{-1} \alpha_j$ v nasprotju z ničelno povrnljivostjo verige X.

Produkt markovskih verig — 6

$$\sum_{s_k \in F} p_{ik}^{(n_r)} p_{kj} \leqslant p_{ij}^{(n_r+1)} = \sum_{s_k} p_{ik} p_{kj}^{(n_r)}.$$

Ko pošljemo r proti neskončno, uporabimo (2) in še podoben trik kot v dokazu prejšnjih ocen, dobimo od tod najprej

$$\sum_{s_k \in F} \alpha_k p_{kj} \leqslant \sum_{s_k} p_{ik} \alpha_j = \alpha_j,$$

in od tod

$$\sum_{s_k} \alpha_k p_{kj} \leqslant \alpha_j.$$

Preprost premislek (npr s protislovjem) pa nas prepriča, da mora v tej oceni v resnici veljati enačaj.
To dejstvo pa nas pripelje do stacionarne porazdelitve $\pi_j = \alpha^{-1} \alpha_j$ v nasprotju z ničelno povrnljivostjo verige X.

Ciklične verige

Izrek

Izberimo poljubni stanji s_i in s_j iz nerazcepne ciklične verige s periodo d. Tedaj imajo vsa naravna števila n z lastnostjo $p_{ij}^{(n)} > 0$ isti ostanek pri deljenju z d.

Naj bosta m in n dve števili s to lastnostjo, število k pa naj bo tako, da je $p_{ji}^{(k)} > 0$. Tedaj je $p_{ii}^{(n+k)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)} > 0$. Zato je $n + k$ deljiv z d in podobno je $m + k$ deljiv z d. Od tod dobimo, da je tudi njuna razlika $m - n = (m + k) - (n + k)$ deljiva z d.

Ciklične verige

Izrek

Izberimo poljubni stanji s_i in s_j iz nerazcepne ciklične verige s periodo d. Tedaj imajo vsa naravna števila n z lastnostjo $p_{ij}^{(n)} > 0$ isti ostanek pri deljenju z d.

Naj bosta m in n dve števili s to lastnostjo, število k pa naj bo tako, da je $p_{ji}^{(k)} > 0$. Tedaj je $p_{ii}^{(n+k)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)} > 0$. Zato je $n + k$ deljiv z d in podobno je $m + k$ deljiv z d. Od tod dobimo, da je tudi njuna razlika $m - n = (m + k) - (n + k)$ deljiva z d.

Izrek

Za nerazcepno ciklično verigo s periodo d obstajajo disjunktne množice stanj $S_0, S_1, \ldots, S_{d-1}$, za katere velja, da pri poljubnem $s_i \in S_0$ in $s_j \in S_k$ iz $p_{ij}^{(n)} > 0$ pri nekem n sledi, da je k ostanek pri deljenju števila n z d.

Ciklične verige

Izrek

Izberimo poljubni stanji s_i in s_j iz nerazcepne ciklične verige s periodo d. Tedaj imajo vsa naravna števila n z lastnostjo $p_{ij}^{(n)} > 0$ isti ostanek pri deljenju z d.

Naj bosta m in n dve števili s to lastnostjo, število k pa naj bo tako, da je $p_{ji}^{(k)} > 0$. Tedaj je $p_{ii}^{(n+k)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)} > 0$. Zato je $n+k$ deljiv z d in podobno je $m+k$ deljiv z d. Od tod dobimo, da je tudi njuna razlika $m-n=(m+k)-(n+k)$ deljiva z d.

Izrek

Za nerazcepno ciklično verigo s periodo d obstajajo disjunktne množice stanj $S_0, S_1, \ldots, S_{d-1}$, za katere velja, da pri poljubnem $s_i \in S_0$ in $s_j \in S_k$ iz $p_{ij}^{(n)} > 0$ pri nekem n sledi, da je k ostanek pri deljenju števila n z d.

Ciklične verige — nadaljevanje

Drugače povedano: Veriga gre iz nekega stanja iz S_0 v enem koraku v stanje iz S_1, iz nekega stanja iz S_1 gre v stanje iz S_2 in tako naprej do S_{d-1}, od tod pa se spet vrne v S_0. Verigi lahko priredimo d verig X_{nd+k}, ki so ergodijske in za vsako od njih velja prejšnji limitni izrek.

Izrek (Limitni izrek za ciklično verigo)

Za nerazcepno ciklično verigo s periodo d velja

$$p_{ij}^{(nd+k)} \to \frac{d}{m_j},$$

Ciklične verige — nadaljevanje

Drugače povedano: Veriga gre iz nekega stanja iz S_0 v enem koraku v stanje iz S_1, iz nekega stanja iz S_1 gre v stanje iz S_2 in tako naprej do S_{d-1}, od tod pa se spet vrne v S_0. Verigi lahko priredimo d verig X_{nd+k}, ki so ergodijske in za vsako od njih velja prejšnji limitni izrek.

Izrek (Limitni izrek za ciklično verigo)

Za nerazcepno ciklično verigo s periodo d velja

$$p_{ij}^{(nd+k)} \longrightarrow \frac{d}{m_j},$$

ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j z lastnostjo, da da število korakov, potrebnih za prehod iz s_i v s_j pri deljenju z d ostanek k. V vseh ostalih primerih je ta limita enaka 0, vselej pa je neodvisna od začetnega stanja s_i.

Ciklične verige — nadaljevanje

Drugače povedano: Veriga gre iz nekega stanja iz S_0 v enem koraku v stanje iz S_1, iz nekega stanja iz S_1 gre v stanje iz S_2 in tako naprej do S_{d-1}, od tod pa se spet vrne v S_0. Verigi lahko priredimo d verig X_{nd+k}, ki so ergodijske in za vsako od njih velja prejšnji limitni izrek.

Izrek (Limitni izrek za ciklično verigo)

Za nerazcepno ciklično verigo s periodo d velja

$$p_{ij}^{(nd+k)} \longrightarrow \frac{d}{m_j},$$

ko gre $n \to \infty$ za vsa stanja s_i in s_j z lastnostjo, da da število korakov, potrebnih za prehod iz s_i v s_j pri deljenju z d ostanek k. V vseh ostalih primerih je ta limita enaka 0, vselej pa je neodvisna od začetnega stanja s_i.

Splošne verige

Spomnimo se fundamentalnega strukturnega izreka za markovske verige. Če množico stanj razdelimo na disjunktne podmnožice M vseh minljivih stanj ter ekvivalenčne razrede povrnljivih stanj S_1, S_2, S_3, dobimo v prirejenem bložnem zapisu prehodno matriko P v bločni zgornji trikotni obliki;

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & * & * & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ko računamo potence te matrike, se zgornje trikotna oblika ohranja

Splošne verige

Spomnimo se fundamentalnega strukturnega izreka za markovske verige. Če množico stanj razdelimo na disjunktne podmnožice M vseh minljivih stanj ter ekvivalenčne razrede povrnljivih stanj S_1, S_2, S_3, dobimo v prirejenem bložnem zapisu prehodno matriko P v bločni zgornji trikotni obliki;

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & * & * & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ko računamo potence te matrike, se zgornje trikotna oblika ohranja

$$P^n = \begin{pmatrix} P_0^n & * & * & \cdots \\ 0 & P_1^n & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Splošne verige

Spomnimo se fundamentalnega strukturnega izreka za markovske verige. Če množico stanj razdelimo na disjunktne podmnožice M vseh minljivih stanj ter ekvivalenčne razrede povrnljivih stanj S_1, S_2, S_3, dobimo v prirejenem bložnem zapisu prehodno matriko P v bločni zgornji trikotni obliki;

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & * & * & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ko računamo potence te matrike, se zgornje trikotna oblika ohranja

$$P^n = \begin{pmatrix} P_0^n & * & * & \cdots \\ 0 & P_1^n & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Minljiva stanja

Da bi dobili povsem splošni limitni izrek, nam ostane le še študij minljivih stanj. Glede tega velja naslednji izrek.

Izrek (Limitni izrek za minljiva stanja)

Za poljubno stanje s_i markovske verige ter za poljubno aperiodično stanje s_j velja

$$p_{ij}^{(n)} \longrightarrow \frac{f_{ij}}{m_j},$$

ko gre $n \longrightarrow \infty$.

Minljiva stanja

Da bi dobili povsem splošni limitni izrek, nam ostane le še študij minljivih stanj. Glede tega velja naslednji izrek.

Izrek (Limitni izrek za minljiva stanja)

Za poljubno stanje s_i markovske verige ter za poljubno aperiodično stanje s_j velja

$$p_{ij}^{(n)} \longrightarrow \frac{f_{ij}}{m_j},$$

ko gre $n \to \infty$.

Vsakdo si zdaj lahko sam zapiše še rezultat za primer, ko je stanje s_j periodično, in s tem pride (ob uporabi fundamentalnega strukturnega izreka) do limitnega izreka v povsem splošni obliki.

Minljiva stanja

Da bi dobili povsem splošni limitni izrek, nam ostane le še študij minljivih stanj. Glede tega velja naslednji izrek.

Izrek (Limitni izrek za minljiva stanja)

Za poljubno stanje s_i markovske verige ter za poljubno aperiodično stanje s_j velja

$$p_{ij}^{(n)} \longrightarrow \frac{f_{ij}}{m_j},$$

ko gre $n \to \infty$.

Vsakdo si zdaj lahko sam zapiše še rezultat za primer, ko je stanje s_j periodično, in s tem pride (ob uporabi fundamentalnega strukturnega izreka) do limitnega izreka v povsem splošni obliki.

Končna nerazcepna veriga

Izrek

V vsaki končni markovski verigi velja:

- *Vselej obstaja povrnljivo stanje.*
- *Vselej obstaja povrnljivo neničelno stanje.*
- *Če je veriga nerazcepna, so vsa njena stanja povrnljiva neničelna.*
- *Prehodna matrika nerazcepne verige ima vselej levi lastni vektor pri lastni vrednosti 1, ki ima vse komponente strogo pozitivne.*
- *Ob dodatni zahtevi na lastni vektor iz prejšnje točke, da je vsota komponent enaka 1, je s tem enolično določen.*

Linearna algebra nam zagotavlja še nekaj v primeru, da je veriga ciklična s periodo d. V tem primeru ima matrika tudi lastne vrednosti $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{d-1}$, kjer je ω primitivni d-ti koren enote.

Končna nerazcepna veriga

Izrek

V vsaki končni markovski verigi velja:

- *Vselej obstaja povrnljivo stanje.*
- *Vselej obstaja povrnljivo neničelno stanje.*
- *Če je veriga nerazcepna, so vsa njena stanja povrnljiva neničelna.*
- *Prehodna matrika nerazcepne verige ima vselej levi lastni vektor pri lastni vrednosti 1, ki ima vse komponente strogo pozitivne.*
- *Ob dodatni zahtevi na lastni vektor iz prejšnje točke, da je vsota komponent enaka 1, je s tem enolično določen.*

Linearna algebra nam zagotavlja še nekaj v primeru, da je veriga ciklična s periodo d. V tem primeru ima matrika tudi lastne vrednosti $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{d-1}$, kjer je ω primitivni d-ti koren enote.

Ehrenfestov model difuzije

Plin se nahaja v posodi, sestavljeni iz dveh enakih delov A in B, med katerima je prehodna membrana. Vseh molekul plina je s. Stanja zapišemo z vektorji $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, kjer ima x_i vrednost 1, kadar je i-ta molekula v področju A, in 0, kadar je i-ta molekula v področju B. Na vsakem koraku zamenja področje natanko ena od molekul.

Model lahko interpretiramo s pomočjo slučajnega sprehoda. Vektorji ξ so oglišča s-razsežne kocke, med katerimi se slučajno sprehaja delec, in sicer zgolj med sosednimi oglišči. Vpeljemo razdaljo med točkama ξ in η kot

$$d(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|.$$

Ehrenfestov model difuzije

Plin se nahaja v posodi, sestavljeni iz dveh enakih delov A in B, med katerima je prehodna membrana. Vseh molekul plina je s. Stanja zapišemo z vektorji $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, kjer ima x_i vrednost 1, kadar je i-ta molekula v področju A, in 0, kadar je i-ta molekula v področju B. Na vsakem koraku zamenja področje natanko ena od molekul.

Model lahko interpretiramo s pomočjo slučajnega sprehoda. Vektorji ξ so oglišča s-razsežne kocke, med katerimi se slučajno sprehaja delec, in sicer zgolj med sosednimi oglišči. Vpeljemo razdaljo med točkama ξ in η kot

$$d(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|.$$

Povprečni čas prehoda med dvema točkama je odvisen zgolj od te razdalje med njima.

Ehrenfestov model difuzije

Plin se nahaja v posodi, sestavljeni iz dveh enakih delov A in B, med katerima je prehodna membrana. Vseh molekul plina je s. Stanja zapišemo z vektorji $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, kjer ima x_i vrednost 1, kadar je i-ta molekula v področju A, in 0, kadar je i-ta molekula v področju B. Na vsakem koraku zamenja področje natanko ena od molekul.
Model lahko interpretiramo s pomočjo slučajnega sprehoda. Vektorji ξ so oglišča s-razsežne kocke, med katerimi se slučajno sprehaja delec, in sicer zgolj med sosednimi oglišči. Vpeljemo razdaljo med točkama ξ in η kot

$$d(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|.$$

Povprečni čas prehoda med dvema točkama je odvisen zgolj od te razdalje med njima.