Verjetnost 2
Četrto poglavje
Rojstni procesi

Matjaž Omladič

Oktober 2010

Vsebina

Poissonova porazdelitev

Izberimo pozitivno realno število λ, označimo $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ in vpeljimo verjetnostno porazdelitev z diskretno gostoto verjetnosti $\pi(\lambda) = \{\pi_k(\lambda) | k \in \mathbb{N}^0\}$, kjer je

$$\pi_k(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^k.$$

Hitro preverimo, da je vsota vseh teh verjetnosti 1 in dobljeno porazdelitev poimenujemo *Poissonova porazdelitev s parametrom λ*.

Poissonova porazdelitev

Izberimo pozitivno realno število λ, označimo $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ in vpeljimo verjetnostno porazdelitev z diskretno gostoto verjetnosti $\pi(\lambda) = \{\pi_k(\lambda) | k \in \mathbb{N}^0\}$, kjer je

$$\pi_k(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^k.$$

Hitro preverimo, da je vsota vseh teh verjetnosti 1 in dobljeno porazdelitev poimenujemo *Poissonova porazdelitev s parametrom* λ.

Naj bo X tako porazdeljen, naj bo torej $P(X = k) = \pi_k(\lambda)$. Preprosto je izračunati, da je $E(X) = \lambda$ in $D(X) = \lambda$.

Poissonova porazdelitev

Izberimo pozitivno realno število λ, označimo $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ in vpeljimo verjetnostno porazdelitev z diskretno gostoto verjetnosti $\pi(\lambda) = \{\pi_k(\lambda) | k \in \mathbb{N}^0\}$, kjer je

$$\pi_k(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^k.$$

Hitro preverimo, da je vsota vseh teh verjetnosti 1 in dobljeno porazdelitev poimenujemo *Poissonova porazdelitev s parametrom* λ.
Naj bo X tako porazdeljen, naj bo torej $P(X = k) = \pi_k(\lambda)$.
Preprosto je izračunati, da je $E(X) = \lambda$ in $D(X) = \lambda$.
Spomnimo se še *binomske porazdelitve* z diskretno gostoto verjetnosti $B(n; p) = \{B_k(n; p) | 0 \leqslant k \leqslant n\}$,kjer je

$$B_k(n; p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Oglejmo si kvocient dveh zaporednih vrednosti te gostote:

Poissonova porazdelitev

Izberimo pozitivno realno število λ, označimo $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ in vpeljimo verjetnostno porazdelitev z diskretno gostoto verjetnosti $\pi(\lambda) = \{\pi_k(\lambda) | k \in \mathbb{N}^0\}$, kjer je

$$\pi_k(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k.$$

Hitro preverimo, da je vsota vseh teh verjetnosti 1 in dobljeno porazdelitev poimenujemo *Poissonova porazdelitev s parametrom* λ.
Naj bo X tako porazdeljen, naj bo torej $P(X = k) = \pi_k(\lambda)$.
Preprosto je izračunati, da je $E(X) = \lambda$ in $D(X) = \lambda$.
Spomnimo se še *binomske porazdelitve* z diskretno gostoto verjetnosti $B(n; p) = \{B_k(n; p) | 0 \leqslant k \leqslant n\}$,kjer je

$$B_k(n; p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Oglejmo si kvocient dveh zaporednih vrednosti te gostote:

Poissonov limitni izrek

$$\frac{B_{k+1}(n;p)}{B_k(n;p)} = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}.$$

Če vstavimo zaporedje vrednosti $p_n = \lambda n^{-1}$, dobimo v limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{k+1}(n;p_n)}{B_k(n;p_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{k+1}\frac{n-k}{n-\lambda} = \frac{\lambda}{k+1}.$$

Ker je po drugi strani

$$\lim_{n\to\infty} B_0(n;p_n) = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda},$$

dobimo od tod:

Poissonov limitni izrek

$$\frac{B_{k+1}(n;p)}{B_k(n;p)} = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}.$$

Če vstavimo zaporedje vrednosti $p_n = \lambda n^{-1}$, dobimo v limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{k+1}(n;p_n)}{B_k(n;p_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{k+1}\frac{n-k}{n-\lambda} = \frac{\lambda}{k+1}.$$

Ker je po drugi strani

$$\lim_{n\to\infty} B_0(n;p_n) = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda},$$

dobimo od tod:

Izrek (Poissonov limitni izrek, 1832)

$$\lim_{n\to\infty} B_k\left(n;\frac{\lambda}{n}\right) = \pi_k(\lambda)$$

Poissonov limitni izrek

$$\frac{B_{k+1}(n;p)}{B_k(n;p)} = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}.$$

Če vstavimo zaporedje vrednosti $p_n = \lambda n^{-1}$, dobimo v limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{k+1}(n;p_n)}{B_k(n;p_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{k+1}\frac{n-k}{n-\lambda} = \frac{\lambda}{k+1}.$$

Ker je po drugi strani

$$\lim_{n\to\infty} B_0(n;p_n) = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda},$$

dobimo od tod:

Izrek (Poissonov limitni izrek, 1832)

$$\lim_{n\to\infty} B_k\left(n;\frac{\lambda}{n}\right) = \pi_k(\lambda)$$

Poissonov limitni izrek — nadaljevanje

Povprečja in disperzije se seveda ujemajo s pričakovanimi. Poissonov limitni izrek formulirajmo bolj pragmatično: *Če je v binomski porazdelitvi $B(n; p)$ verjetnost p majhna, število n pa veliko, tako da je np približno enako λ, potem lahko verjetnost $B_k(n; p)$ aproksimiramo z verjetnostjo $\pi_k(\lambda)$.*

Pogoji prostorskega "homogenega kaosa": Virus se razporeja po N škatlah. V vsaki škatli je v povprečju μ delcev, v vseh škatlah jih je $N\mu$, torej je porazdeljen po zakonu $B(N\mu; \frac{1}{N})$. Če je škatel veliko, je verjetnost, da je v eni škatli k virusov približno enaka $\pi_k(\mu)$. Konkreten zgled — virusi v vzorcu krvi.

Poissonov limitni izrek — nadaljevanje

Povprečja in disperzije se seveda ujemajo s pričakovanimi. Poissonov limitni izrek formulirajmo bolj pragmatično: *Če je v binomski porazdelitvi $B(n; p)$ verjetnost p majhna, število n pa veliko, tako da je np približno enako λ, potem lahko verjetnost $B_k(n; p)$ aproksimiramo z verjetnostjo $\pi_k(\lambda)$.*

Pogoji prostorskega "homogenega kaosa": Virus se razporeja po N škatlah. V vsaki škatli je v povprečju μ delcev, v vseh škatlah jih je $N\mu$, torej je porazdeljen po zakonu $B(N\mu; \frac{1}{N})$. Če je škatel veliko, je verjetnost, da je v eni škatli k virusov približno enaka $\pi_k(\mu)$. Konkreten zgled — virusi v vzorcu krvi.

Časovni "homogeni kaos": Neregularno pojavljanje delcev opazujemo v časovnem intervalu $[0, t]$, ki ga razdelimo na N enakih delov. V povprečju prihaja μ delcev na sekundo, v vsak od intervalov jih pride $\dfrac{\mu t}{N}$. Porazdelitev po intervalih je $B_k(N; \dfrac{\mu t}{N})$, kar je pri velikih N približno enako $\pi_k(\mu t)$.

Poissonov limitni izrek — nadaljevanje

Povprečja in disperzije se seveda ujemajo s pričakovanimi. Poissonov limitni izrek formulirajmo bolj pragmatično: *Če je v binomski porazdelitvi $B(n; p)$ verjetnost p majhna, število n pa veliko, tako da je np približno enako λ, potem lahko verjetnost $B_k(n; p)$ aproksimiramo z verjetnostjo $\pi_k(\lambda)$.*

Pogoji prostorskega "homogenega kaosa": Virus se razporeja po N škatlah. V vsaki škatli je v povprečju μ delcev, v vseh škatlah jih je $N\mu$, torej je porazdeljen po zakonu $B(N\mu; \frac{1}{N})$. Če je škatel veliko, je verjetnost, da je v eni škatli k virusov približno enaka $\pi_k(\mu)$. Konkreten zgled — virusi v vzorcu krvi. Časovni "homogeni kaos": Neregularno pojavljanje delcev opazujemo v časovnem intervalu $[0, t]$, ki ga razdelimo na N enakih delov. V povprečju prihaja μ delcev na sekundo, v vsak od intervalov jih pride $\dfrac{\mu t}{N}$. Porazdelitev po intervalih je $B_k(N; \dfrac{\mu t}{N})$, kar je pri velikih N približno enako $\pi_k(\mu t)$.

Poissonov tok — 1

Opisano neregularno pojavljanje delcev v času je *Poissonov tok*. A do tega lahko pridemo še na en ekvivalenten način. Opazujmo zaporedje pozitivnih, neodvisnih slučajnih spremenljivk $T_1, T_2, \ldots$, ki so vse porazdeljene eksponentno s pozitivnim parametrom λ, torej $E(\lambda)$. (Zvezna) gostota porazdelitve je enaka

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

pri pozitivnih t in je enaka 0 sicer. Namesto porazdelitvene funkcije pri tej porazdelitvi raje podamo *repne verjetnosti* $P(T_j > t) = e^{-\lambda t}$. Iz dejstva, da so te spremenljivke neodvisne, dobimo njihove skupne porazdelitve.

Poissonov tok — 1

Opisano neregularno pojavljanje delcev v času je *Poissonov tok*. A do tega lahko pridemo še na en ekvivalenten način. Opazujmo zaporedje pozitivnih, neodvisnih slučajnih spremenljivk $T_1, T_2, \ldots$, ki so vse porazdeljene eksponentno s pozitivnim parametrom λ, torej $E(\lambda)$. (Zvezna) gostota porazdelitve je enaka

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

pri pozitivnih t in je enaka 0 sicer. Namesto porazdelitvene funkcije pri tej porazdelitvi raje podamo *repne verjetnosti* $P(T_j > t) = e^{-\lambda t}$. Iz dejstva, da so te spremenljivke neodvisne, dobimo njihove skupne porazdelitve.

Konkretni zgledi prihajajo predvsem kot medprihodni časi, na primer med dvema zaporednima voziloma v toku vozil, ali med dvema zaporednima zahtevkoma, ki jih prejme neka zavarovalnica, med dvema zporednima klicema na telefonsko centralo, itd.

Poissonov tok — 1

Opisano neregularno pojavljanje delcev v času je *Poissonov tok*. A do tega lahko pridemo še na en ekvivalenten način. Opazujmo zaporedje pozitivnih, neodvisnih slučajnih spremenljivk $T_1, T_2, \ldots$, ki so vse porazdeljene eksponentno s pozitivnim parametrom λ, torej $E(\lambda)$. (Zvezna) gostota porazdelitve je enaka

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

pri pozitivnih t in je enaka 0 sicer. Namesto porazdelitvene funkcije pri tej porazdelitvi raje podamo *repne verjetnosti* $P(T_j > t) = e^{-\lambda t}$. Iz dejstva, da so te spremenljivke neodvisne, dobimo njihove skupne porazdelitve.
Konkretni zgledi prihajajo predvsem kot medprihodni časi, na primer med dvema zaporednima voziloma v toku vozil, ali med dvema zaporednima zahtevkoma, ki jih prejme neka zavarovalnica, med dvema zporednima klicema na telefonsko centralo, itd.

Poissonov tok — 2

Ker je

$$E(T_j) = \frac{1}{\lambda},$$

pomeni manjši λ, da v povprečju čakamo dlje na naslednji prihod, zato pravimo parametru λ tudi *intezivnost Poissonovega toka*.

Zdaj pa označimo $S_0 = 0$ in za $n \geqslant 1$:

$$S_n = T_1 + \cdots + T_n.$$

Tako dobljena slučajna spremenljivka ima pomen *čas čakanja na n-ti prihod*. Tako pomeni dogodek $\{S_n \leqslant t\}$, da se bo n-ti prihod zgodil do časa t ("do časa" seveda zaradi zveznosti spremenljivk pomeni isto kot "do časa ali ob času").

Poissonov tok — 2

Ker je

$$E(T_j) = \frac{1}{\lambda},$$

pomeni manjši λ, da v povprečju čakamo dlje na naslednji prihod, zato pravimo parametru λ tudi *intezivnost Poissonovega toka*.

Zdaj pa označimo $S_0 = 0$ in za $n \geqslant 1$:

$$S_n = T_1 + \cdots + T_n.$$

Tako dobljena slučajna spremenljivka ima pomen *čas čakanja na n-ti prihod*. Tako pomeni dogodek $\{S_n \leqslant t\}$, da se bo n-ti prihod zgodil do časa t ("do časa" seveda zaradi zveznosti spremenljivk pomeni isto kot "do časa ali ob času").

Če torej z $N(t)$ označimo slučajno spremenljivko število prihodov do časa t, potem velja

$$\{S_n \leqslant t\} = \{N(t) \geqslant n\}.$$

Poissonov tok — 2

Ker je

$$E(T_j) = \frac{1}{\lambda},$$

pomeni manjši λ, da v povprečju čakamo dlje na naslednji prihod, zato pravimo parametru λ tudi *intezivnost Poissonovega toka*.

Zdaj pa označimo $S_0 = 0$ in za $n \geqslant 1$:

$$S_n = T_1 + \cdots + T_n.$$

Tako dobljena slučajna spremenljivka ima pomen *čas čakanja na n-ti prihod*. Tako pomeni dogodek $\{S_n \leqslant t\}$, da se bo n-ti prihod zgodil do časa t ("do časa" seveda zaradi zveznosti spremenljivk pomeni isto kot "do časa ali ob času").

Če torej z $N(t)$ označimo slučajno spremenljivko število prihodov do časa t, potem velja

$$\{S_n \leqslant t\} = \{N(t) \geqslant n\}.$$

Poissonov tok — 3

Verjetnosti bomo računali s pomočjo Laplaceove transformacije. Najprej je za medprihodni čas T_j

$$L_{T_j}(u) = E(e^{-uT_j}) = \int_0^\infty e^{-tu} f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-t(u+\lambda)}\, dt = \frac{\lambda}{u+\lambda}.$$

Poissonov tok — 3

Verjetnosti bomo računali s pomočjo Laplaceove transformacije. Najprej je za medprihodni čas T_j

$$L_{T_j}(u) = E(e^{-uT_j}) = \int_0^\infty e^{-tu} f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-t(u+\lambda)}\,dt = \frac{\lambda}{u+\lambda}.$$

Zaradi neodvisnosti teh časov je potem

$$L_{S_n}(u) = E(e^{-uS_n}) = E(e^{-u\sum_{j=1}^n T_j}) = E(\prod_{j=1}^n e^{-uT_j}) =$$

$$= \prod_{j=1}^n E(e^{-uT_j}) = \left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^n.$$

Gostota verjetnosti je s svojo Laplaceovo transformiranko enolično določena.

Poissonov tok — 3

Verjetnosti bomo računali s pomočjo Laplaceove transformacije. Najprej je za medprihodni čas T_j

$$L_{T_j}(u) = E(e^{-uT_j}) = \int_0^\infty e^{-tu} f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-t(u+\lambda)}\,dt = \frac{\lambda}{u+\lambda}.$$

Zaradi neodvisnosti teh časov je potem

$$L_{S_n}(u) = E(e^{-uS_n}) = E(e^{-u\sum_{j=1}^n T_j}) = E(\prod_{j=1}^n e^{-uT_j}) =$$

$$= \prod_{j=1}^n E(e^{-uT_j}) = \left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^n.$$

Gostota verjetnosti je s svojo Laplaceovo transformiranko enolično določena.

Poissonov tok — 4

Kako izračunati gostoto, ki ji je prirejena zgornja Laplaceova transformiranka? Na primer, odvajajmo n-krat identiteto

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

in vanjo vstavimo $x = u + \lambda$, da dobimo

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} e^{-ut}\,dt = \left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^n.$$

Iskana gostota je ravno gostota porazdelitve $\Gamma(n-1;\lambda)$.

Poissonov tok — 4

Kako izračunati gostoto, ki ji je prirejena zgornja Laplaceova transformiranka? Na primer, odvajajmo n-krat identiteto

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

in vanjo vstavimo $x = u + \lambda$, da dobimo

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} e^{-ut}\,dt = \left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^n .$$

Iskana gostota je ravno gostota porazdelitve $\Gamma(n-1; \lambda)$.
Radi bi izračunali verjetnost

$$P(N(t) = n) = P(S_n \leqslant t) - P(S_{n+1} \leqslant t).$$

Dobimo jo z integriranjem po delih:

Poissonov tok — 4

Kako izračunati gostoto, ki ji je prirejena zgornja Laplaceova transformiranka? Na primer, odvajajmo n-krat identiteto

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

in vanjo vstavimo $x = u + \lambda$, da dobimo

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} e^{-ut}\,dt = \left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^n.$$

Iskana gostota je ravno gostota porazdelitve $\Gamma(n-1;\lambda)$. Radi bi izračunali verjetnost

$$P(N(t) = n) = P(S_n \leqslant t) - P(S_{n+1} \leqslant t).$$

Dobimo jo z integriranjem po delih:

Poissonov tok — 5

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t s^{n-1}e^{-\lambda s}\,ds = \frac{\lambda^n}{n!}t^n e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^t s^n e^{-\lambda s}\,ds.$$

Tako smo dokazali izrek:

Izrek (Poissonov tok)

Če so medprihodni časi neodvisni in porazdeljeni eksponentno s parametrom λ, potem je skupno število prihodov v časovnem intervalu dolžine t za vsak $t > 0$ porazdeljeno po Poissonovem zakonu $\pi(\lambda t)$.

Poissonov tok — 5

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t s^{n-1}e^{-\lambda s}\,ds = \frac{\lambda^n}{n!}t^n e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^t s^n e^{-\lambda s}\,ds.$$

Tako smo dokazali izrek:

Izrek (Poissonov tok)

Če so medprihodni časi neodvisni in porazdeljeni eksponentno s parametrom λ, potem je skupno število prihodov v časovnem intervalu dolžine t za vsak $t > 0$ porazdeljeno po Poissonovem zakonu $\pi(\lambda t)$.

V resnici trdi izrek nekoliko več kot smo dokazali: Dobljeni Poissonov tok je časovno homogen v naslednjem smislu. Za časovni točki $s < t$ se število prihodov med njima $N(t) - N(s)$ obnaša enako kot $N(t-s)$, torej je odvisno le od dolžine časovnega intervala, nič pa od tega, koliko je bilo prihodov že prej. To dejstvo preprosto sledi iz naših pogojev

Poissonov tok — 5

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t s^{n-1}e^{-\lambda s}\,ds = \frac{\lambda^n}{n!}t^n e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^t s^n e^{-\lambda s}\,ds.$$

Tako smo dokazali izrek:

Izrek (Poissonov tok)

Če so medprihodni časi neodvisni in porazdeljeni eksponentno s parametrom λ, potem je skupno število prihodov v časovnem intervalu dolžine t za vsak $t > 0$ porazdeljeno po Poissonovem zakonu $\pi(\lambda t)$.

V resnici trdi izrek nekoliko več kot smo dokazali: Dobljeni Poissonov tok je časovno homogen v naslednjem smislu. Za časovni točki $s < t$ se število prihodov med njima $N(t) - N(s)$ obnaša enako kot $N(t-s)$, torej je odvisno le od dolžine časovnega intervala, nič pa od tega, koliko je bilo prihodov že prej. To dejstvo preprosto sledi iz naših pogojev.

Definicija Poissonovega procesa

Družino slučajnih spremenljivk $\{X(t) | t \in [0, \infty)\}$ poimenujemo *Poissonov proces s parametrom* λ, če so izpolnjeni naslednji pogoji:

- $X(0) = 0$
- Za poljubni končni nabor disjukntnih intervalov (s_i, t_i) so spremembe $X(t_i) - X(s_i)$ neodvisne
- za poljubni časovni točki $0 < s < t$ je sprememba $X(t) - X(s)$ porazdeljena po Poissonovem zakonu s parametrom $\lambda(t - s)$

Defincija Poissonovega procesa

Družino slučajnih spremenljivk $\{X(t) | t \in [0, \infty)\}$ poimenujemo *Poissonov proces s parametrom* λ, če so izpolnjeni naslednji pogoji:

- $X(0) = 0$
- Za poljubni končni nabor disjukntnih intervalov (s_i, t_i) so spremembe $X(t_i) - X(s_i)$ neodvisne
- za poljubni časovni točki $0 < s < t$ je sprememba $X(t) - X(s)$ porazdeljena po Poissonovem zakonu s parametrom $\lambda(t - s)$

Pravkar dokazani izrek nam torej pove, da je Poissonov tok $\{N(t) | t \in [0, \infty)\}$ primer Poissonovega procesa. V resnici pa se da dokazati tudi nazaj, da je vsak Poissonov proces porojen iz nekega Poissonovega toka. Ker Poissonov proces šteje prihode, mu včasih rečemo tudi *proces štetja*.

Defincija Poissonovega procesa

Družino slučajnih spremenljivk $\{X(t) | t \in [0, \infty)\}$ poimenujemo *Poissonov proces s parametrom* λ, če so izpolnjeni naslednji pogoji:

- $X(0) = 0$
- Za poljubni končni nabor disjukntnih intervalov (s_i, t_i) so spremembe $X(t_i) - X(s_i)$ neodvisne
- za poljubni časovni točki $0 < s < t$ je sprememba $X(t) - X(s)$ porazdeljena po Poissonovem zakonu s parametrom $\lambda(t - s)$

Pravkar dokazani izrek nam torej pove, da je Poissonov tok $\{N(t) | t \in [0, \infty)\}$ primer Poissonovega procesa. V resnici pa se da dokazati tudi nazaj, da je vsak Poissonov proces porojen iz nekega Poissonovega toka. Ker Poissonov proces šteje prihode, mu včasih rečemo tudi *proces štetja*.

Tretja ekvivalentna definicija

Doslej smo srečali dve ekvivalentni definiciji Poissonovega procesa. Iz druge, prikazane na prejšnjem okviru, izpeljemo tretjo, ki bo pomembna za posploševanje. Prva dva pogoja zgoraj ostaneta nespremenjena, tretji pogoj zgoraj pa zamenjamo s pogojem:

(A) Za poljubni časovni točki $0 < t < t + h$ in za poljubni nenegativni celi števili n in m velja

$$P(X(t+h) = n+m | X(t) = n) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h), & \text{pri } m = 0; \\ \lambda h + o(h), & \text{pri } m = 1; \\ o(h), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Tretja ekvivalentna definicija

Doslej smo srečali dve ekvivalentni definiciji Poissonovega procesa. Iz druge, prikazane na prejšnjem okviru, izpeljemo tretjo, ki bo pomembna za posploševanje. Prva dva pogoja zgoraj ostaneta nespremenjena, tretji pogoj zgoraj pa zamenjamo s pogojem:
(A) Za poljubni časovni točki $0 < t < t + h$ in za poljubni nenegativni celi števili n in m velja

$$P(X(t+h) = n+m | X(t) = n) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h), & \text{pri } m = 0; \\ \lambda h + o(h), & \text{pri } m = 1; \\ o(h), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Dokaj očitno je, da Poissonov proces zadošča temu pogoju. Premislek v obratno smer pa pelje preko sistema diferencialnih enačb Kolmogorova.

Tretja ekvivalentna definicija

Doslej smo srečali dve ekvivalentni definiciji Poissonovega procesa. Iz druge, prikazane na prejšnjem okviru, izpeljemo tretjo, ki bo pomembna za posploševanje. Prva dva pogoja zgoraj ostaneta nespremenjena, tretji pogoj zgoraj pa zamenjamo s pogojem:
(A) Za poljubni časovni točki $0 < t < t + h$ in za poljubni nenegativni celi števili n in m velja

$$P(X(t+h) = n+m | X(t) = n) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h), & \text{pri } m = 0; \\ \lambda h + o(h), & \text{pri } m = 1; \\ o(h), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Dokaj očitno je, da Poissonov proces zadošča temu pogoju. Premislek v obratno smer pa pelje preko sistema diferencialnih enačb Kolmogorova.

Najprej pogojimo slučajno spremenljivko $X(t + h)$ glede na možne vrednosti slučajne spremenljivke $X(t)$:

Tretja ekvivalentna definicija

Doslej smo srečali dve ekvivalentni definiciji Poissonovega procesa. Iz druge, prikazane na prejšnjem okviru, izpeljemo tretjo, ki bo pomembna za posploševanje. Prva dva pogoja zgoraj ostaneta nespremenjena, tretji pogoj zgoraj pa zamenjamo s pogojem:
(A) Za poljubni časovni točki $0 < t < t + h$ in za poljubni nenegativni celi števili n in m velja

$$P(X(t+h) = n+m | X(t) = n) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h), & \text{pri } m = 0; \\ \lambda h + o(h), & \text{pri } m = 1; \\ o(h), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Dokaj očitno je, da Poissonov proces zadošča temu pogoju. Premislek v obratno smer pa pelje preko sistema diferencialnih enačb Kolmogorova.
Najprej pogojimo slučajno spremenljivko $X(t + h)$ glede na možne vrednosti slučajne spremenljivke $X(t)$:

Enačbe Kolmogorova — 1

$$P(X(t+h)=j)=\sum_i P(X(t)=i)P(X(t+h)=j|X(t)=i).$$

Glede na pogoj (A) sta v tej enačbi pomembna le dva člena, tj $i=j-1$ in $i=j$. Če označimo $p_j(t)=P(X(t)=j)$, dobimo od tod

$$p_j(t+h)=(\lambda h)p_{j-1}(t)+(1-\lambda h)p_j(t)+o(h).$$

Od te enačbe odštejemo $p_j(t)$ in delimo s h, da dobimo

$$\frac{p_j(t+h)-p_j(t)}{h}=\lambda p_{j-1}(t)-\lambda p_j(t)+\frac{o(h)}{h}.$$

Radi bi izračunali limito izraza na levi, a zaradi pogoja $h>0$ lahko izračunamo le desno limito, ki pa obstaja. Rezultat bomo označili z običajnim znakom za odvod, čeprav gre le za *desni odvod*:

Enačbe Kolmogorova — 1

$$P(X(t+h)=j)=\sum_i P(X(t)=i)P(X(t+h)=j|X(t)=i).$$

Glede na pogoj (A) sta v tej enačbi pomembna le dva člena, tj $i=j-1$ in $i=j$. Če označimo $p_j(t)=P(X(t)=j)$, dobimo od tod

$$p_j(t+h)=(\lambda h)p_{j-1}(t)+(1-\lambda h)p_j(t)+o(h).$$

Od te enačbe odštejemo $p_j(t)$ in delimo s h, da dobimo

$$\frac{p_j(t+h)-p_j(t)}{h}=\lambda p_{j-1}(t)-\lambda p_j(t)+\frac{o(h)}{h}.$$

Radi bi izračunali limito izraza na levi, a zaradi pogoja $h>0$ lahko izračunamo le desno limito, ki pa obstaja. Rezultat bomo označili z običajnim znakom za odvod, čeprav gre le za *desni odvod*:

Enačbe Kolmogorova — 2

$$p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t). \tag{1}$$

Dobljeni sistem enačb, skupaj z začetnimi pogoji $p_0(t) = 1$ in $p_j(t) = 0$ za $j > 0$, poimenujemo *sistem diferencialnih enačb Kolomogorova*. To je najbolj enostaven primer takega sistema. Enostavnost sistema je predvsem v tem, da nastopata v vsaki diferencialni enačbi sistema le po dva zaporedna indeksa. Zato je možno sistem rešiti po *sistemu domin*. Najprej rešimo prvo (pravzaprav ničto) enačbo sistema $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$, ki ima ločljive spremenljivke. Upoštevamo še začetni pogoj:

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, t > 0.$$

Enačbe Kolmogorova — 2

$$p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t). \tag{1}$$

Dobljeni sistem enačb, skupaj z začetnimi pogoji $p_0(t) = 1$ in $p_j(t) = 0$ za $j > 0$, poimenujemo *sistem diferencialnih enačb Kolomogorova*. To je najbolj enostaven primer takega sistema. Enostavnost sistema je predvsem v tem, da nastopata v vsaki diferencialni enačbi sistema le po dva zaporedna indeksa. Zato je možno sistem rešiti po *sistemu domin*. Najprej rešimo prvo (pravzaprav ničto) enačbo sistema $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$, ki ima ločljive spremenljivke. Upoštevamo še začetni pogoj:

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, t > 0.$$

Privzemimo indukcijsko, da smo že dobili rešitve do $p_{j-1}(t)$ in da je slednja enaka

$$p_{j-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda t}, t > 0. \tag{2}$$

Enačbe Kolmogorova — 2

$$p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t). \tag{1}$$

Dobljeni sistem enačb, skupaj z začetnimi pogoji $p_0(t) = 1$ in $p_j(t) = 0$ za $j > 0$, poimenujemo *sistem diferencialnih enačb Kolomogorova*. To je najbolj enostaven primer takega sistema. Enostavnost sistema je predvsem v tem, da nastopata v vsaki diferencialni enačbi sistema le po dva zaporedna indeksa. Zato je možno sistem rešiti po *sistemu domin*. Najprej rešimo prvo (pravzaprav ničto) enačbo sistema $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$, ki ima ločljive spremenljivke. Upoštevamo še začetni pogoj:

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, t > 0.$$

Privzemimo indukcijsko, da smo že dobili rešitve do $p_{j-1}(t)$ in da je slednja enaka

$$p_{j-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda t}, t > 0. \tag{2}$$

Enačbe Kolmogorova — 3

Dobljeni rezultat vstavimo v enačbo (1), da dobimo linearno enačbo prve stopnje:

$$p_j'(t) + \lambda p_j(t) = \lambda p_{j-1}(t).$$

Homogeni del te enačbe je $p_j'(t) + \lambda p_j(t) = 0$, torej enačba enaka ničti enačbi, ki mora imeti tudi enako rešitev homogenega dela

$$p_j(t) = Ce^{-\lambda t}, t > 0.$$

Končno rešitev dobimo z metodo *variacija konstante*. V dobljeno enačbo $C' e^{-\lambda t} = \lambda p_{j-1}(t)$ vstavimo indukcijski privzetek (2), da dobimo preprosto enačbo za C. Ob upoštevanju začetnega pogoja dobimo rešitev

$$p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, t > 0,$$

ki se ujema z indukcijskim privzetkom (2).

Enačbe Kolmogorova — 3

Dobljeni rezultat vstavimo v enačbo (1), da dobimo linearno enačbo prve stopnje:

$$p_j'(t) + \lambda p_j(t) = \lambda p_{j-1}(t).$$

Homogeni del te enačbe je $p_j'(t) + \lambda p_j(t) = 0$, torej enačba enaka ničti enačbi, ki mora imeti tudi enako rešitev homogenega dela

$$p_j(t) = Ce^{-\lambda t}, t > 0.$$

Končno rešitev dobimo z metodo *variacija konstante*. V dobljeno enačbo $C'e^{-\lambda t} = \lambda p_{j-1}(t)$ vstavimo indukcijski privzetek (2), da dobimo preprosto enačbo za C. Ob upoštevanju začetnega pogoja dobimo rešitev

$$p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, t > 0,$$

ki se ujema z indukcijskim privzetkom (2).

Enačbe Kolmogorova — 4

Tako smo rešili sistem enačb (1) in s tem dokazali izrek.

Izrek (Tretja ekvivalentna definicija)

Iz definicije Poissonovega procesa dobimo ekvivalentno definicijo tega procesa, če tretji pogoj zamenjamo s pogojem (A).

Sistem diferencialnih enačb (1) lahko rešujemo tudi s pomočjo momentno rodovne funkcije:

$$G(s,t) = E\left(s^{X(t)}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) s^j .$$

Enačbe Kolmogorova — 4

Tako smo rešili sistem enačb (1) in s tem dokazali izrek.

Izrek (Tretja ekvivalentna definicija)

Iz definicije Poissonovega procesa dobimo ekvivalentno definicijo tega procesa, če tretji pogoj zamenjamo s pogojem (A).

Sistem diferencialnih enačb (1) lahko rešujemo tudi s pomočjo momentno rodovne funkcije:

$$G(s,t) = E\left(s^{X(t)}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) s^j .$$

Funkcijo dobimo kot rešitev parcialne diferencialne enačbe $\frac{\partial G}{\partial t} = \lambda(s-1)G$ z robnim pogojem $G(s,0) = 1$. Rešitev $G(s,t) = e^{\lambda(s-1)t}$ nas pripelje do istih rešitev sistema (1).

Enačbe Kolmogorova — 4

Tako smo rešili sistem enačb (1) in s tem dokazali izrek.

Izrek (Tretja ekvivalentna definicija)

Iz definicije Poissonovega procesa dobimo ekvivalentno definicijo tega procesa, če tretji pogoj zamenjamo s pogojem (A).

Sistem diferencialnih enačb (1) lahko rešujemo tudi s pomočjo momentno rodovne funkcije:

$$G(s,t) = E\left(s^{X(t)}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) s^j .$$

Funkcijo dobimo kot rešitev parcialne diferencialne enačbe $\dfrac{\partial G}{\partial t} = \lambda(s-1)G$ z robnim pogojem $G(s,0) = 1$. Rešitev $G(s,t) = e^{\lambda(s-1)t}$ nas pripelje do istih rešitev sistema (1).

Definicija rojstnega procesa

V definiciji rojstnega procesa izhajamo iz tretje ekvivalentne definicije Poissonovega procesa, v kateri dovolimo spreminjajoče se intenzivnosti namesto konstantnih. Družino slučajnih spremenljivk $\{X(t) | t \in [0, \infty)\}$ poimenujemo *Rojstni proces z intenzivnostmi* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$, če so izpolnjeni naslednji pogoji:

- $X(0) = 0$
- Za poljubni končni nabor disjukntnih intervalov (s_i, t_i) so spremembe $X(t_i) - X(s_i)$ neodvisne
- Za poljubni časovni točki $0 < t < t + h$ in za poljubni nenegativni celi števili n in m velja

$$P(X(t+h) = n+m | X(t) = n) = \begin{cases} 1 - \lambda_n h + o(h), & \text{pri } m = 0; \\ \lambda_n h + o(h), & \text{pri } m = 1; \\ o(h), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Definicija rojstnega procesa

V definiciji rojstnega procesa izhajamo iz tretje ekvivalentne definicije Poissonovega procesa, v kateri dovolimo spreminjajoče se intenzivnosti namesto konstantnih. Družino slučajnih spremenljivk $\{X(t) | t \in [0, \infty)\}$ poimenujemo *Rojstni proces z intenzivnostmi* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$, če so izpolnjeni naslednji pogoji:

- $X(0) = 0$
- Za poljubni končni nabor disjukntnih intervalov (s_i, t_i) so spremembe $X(t_i) - X(s_i)$ neodvisne
- Za poljubni časovni točki $0 < t < t + h$ in za poljubni nenegativni celi števili n in m velja

$$P(X(t+h) = n+m | X(t) = n) = \begin{cases} 1 - \lambda_n h + o(h), & \text{pri } m = 0; \\ \lambda_n h + o(h), & \text{pri } m = 1; \\ o(h), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Oglejmo si nekaj zgledov:

Definicija rojstnega procesa

V definiciji rojstnega procesa izhajamo iz tretje ekvivalentne definicije Poissonovega procesa, v kateri dovolimo spreminjajoče se intenzivnosti namesto konstantnih. Družino slučajnih spremenljivk $\{X(t)|t \in [0,\infty)\}$ poimenujemo *Rojstni proces z intenzivnostmi* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$, če so izpolnjeni naslednji pogoji:

- $X(0) = 0$
- Za poljubni končni nabor disjukntnih intervalov (s_i, t_i) so spremembe $X(t_i) - X(s_i)$ neodvisne
- Za poljubni časovni točki $0 < t < t + h$ in za poljubni nenegativni celi števili n in m velja

$$P(X(t+h) = n+m|X(t) = n) = \begin{cases} 1 - \lambda_n h + o(h), & \text{pri } m = 0; \\ \lambda_n h + o(h), & \text{pri } m = 1; \\ o(h), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Oglejmo si nekaj zgledov:

Zgledi rojstnih procesov

- Najbolj enostavni primer je proces štetja, ko je $\lambda_n = \lambda$ neodvisno od n.
- Modelom v biologiji je bližje *proces enostavnega rojstva*, ko vzamemo $\lambda_n = n\lambda$. V tem modelu vsak element biološke populacije lahko porodi po en nov element te populacije. V teh modelih ne dopuščamo možnosti, da bi kateri od elementov populacije lahko tudi umrl.

Zgledi rojstnih procesov

- Najbolj enostavni primer je proces štetja, ko je $\lambda_n = \lambda$ neodvisno od n.
- Modelom v biologiji je bližje *proces enostavnega rojstva*, ko vzamemo $\lambda_n = n\lambda$. V tem modelu vsak element biološke populacije lahko porodi po en nov element te populacije. V teh modelih ne dopuščamo možnosti, da bi kateri od elementov populacije lahko tudi umrl.
- V procesu enostavnega rojstva s priseljevanjem spet vsak element porodi po en nov element, poleg tega pa dovolimo tudi konstantno priseljevaje od zunaj. Intenzivnosti so $\lambda_n = n\lambda + \mu$.

Zgledi rojstnih procesov

- Najbolj enostavni primer je proces štetja, ko je $\lambda_n = \lambda$ neodvisno od n.
- Modelom v biologiji je bližje *proces enostavnega rojstva*, ko vzamemo $\lambda_n = n\lambda$. V tem modelu vsak element biološke populacije lahko porodi po en nov element te populacije. V teh modelih ne dopuščamo možnosti, da bi kateri od elementov populacije lahko tudi umrl.
- V procesu enostavnega rojstva s priseljevanjem spet vsak element porodi po en nov element, poleg tega pa dovolimo tudi konstantno priseljevaje od zunaj. Intenzivnosti so $\lambda_n = n\lambda + \mu$.

Obravnave se lotimo z izpeljavo diferencialnih enačb Kolmogorova. Tokrat dobimo dva sistema teh enačb. Prvi sistem dobimo na isti način kot v primeru Poissonovega procesa, torej tako, da pogojimo slučajno spremenljivko $X(t+h)$ glede na možne vrednosti slučajne spremenljivke $X(t)$:

Zgledi rojstnih procesov

- Najbolj enostavni primer je proces štetja, ko je $\lambda_n = \lambda$ neodvisno od n.
- Modelom v biologiji je bližje *proces enostavnega rojstva*, ko vzamemo $\lambda_n = n\lambda$. V tem modelu vsak element biološke populacije lahko porodi po en nov element te populacije. V teh modelih ne dopuščamo možnosti, da bi kateri od elementov populacije lahko tudi umrl.
- V procesu enostavnega rojstva s priseljevanjem spet vsak element porodi po en nov element, poleg tega pa dovolimo tudi konstantno priseljevaje od zunaj. Intenzivnosti so $\lambda_n = n\lambda + \mu$.

Obravnave se lotimo z izpeljavo diferencialnih enačb Kolmogorova. Tokrat dobimo dva sistema teh enačb. Prvi sistem dobimo na isti način kot v primeru Poissonovega procesa, torej tako, da pogojimo slučajno spremenljivko $X(t+h)$ glede na možne vrednosti slučajne spremenljivke $X(t)$:

Enačbe Kolmogorova — 1

Vpeljemo prehodne verjetnosti $p_{ij}(t) = P(X(s+t) = j | X(s) = i)$, ki so neodvisne od časa s:

$$p_{ij}(t+h) = P(X(s+t+h) = j | X(s) = i) =$$

$$\sum_k P(X(s+t) = k | X(s) = i) P(X(s+t+h) = j | X(s+t) = k) =$$

$$\sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(h).$$

Podobno kot pri Poissonovem procesu pridemo do sistema (spet označimo desni odvod z običajnim znakom za odvod):

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t), j \geqslant i. \tag{3}$$

Z vpeljavo dodatne "intenzivnosti" $\lambda_{-1} = 0$ poenotimo zapis začetne enačbe. Dobljeni sistem enačb, skupaj z začetnimi pogoji $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, poimenujemo *naprejšnji sistem diferencialnih enačb Kolmogorova*.

Enačbe Kolmogorova — 1

Vpeljemo prehodne verjetnosti
$p_{ij}(t) = P(X(s+t) = j | X(s) = i)$, ki so neodvisne od časa s:

$$p_{ij}(t+h) = P(X(s+t+h) = j | X(s) = i) =$$

$$\sum_k P(X(s+t) = k | X(s) = i) P(X(s+t+h) = j | X(s+t) = k) =$$

$$\sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(h).$$

Podobno kot pri Poissonovem procesu pridemo do sistema (spet označimo desni odvod z običajnim znakom za odvod):

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t), j \geqslant i. \quad (3)$$

Z vpeljavo dodatne "intenzivnosti" $\lambda_{-1} = 0$ poenotimo zapis začetne enačbe. Dobljeni sistem enačb, skupaj z začetnimi pogoji $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, poimenujemo *naprejšnji sistem diferencialnih enačb Kolmogorova*.

Enačbe Kolmogorova — 2

Drugi sistem enačb dobimo na podoben način, le da pogojimo slučajno spremenljivko $X(t+h)$ glede na možne vrednosti slučajne spremenljivke $X(h)$:

$$p_{ij}(t+h) = P(X(s+t+h) = j | X(s) = i) =$$

$$\sum_k P(X(s+h) = k | X(s) = i) P(X(s+t+h) = j | X(s+h) = k) =$$

$$\sum_k p_{ik}(h) p_{kj}(t).$$

Podobno kot pri Poissonovem procesu pridemo do sistema (spet označimo desni odvod z običajnim znakom za odvod):

$$p'_{ij}(t) = \lambda_i p_{i+1,j}(t) - \lambda_i p_{ij}(t), j \geqslant i. \qquad (4)$$

Dobljeni sistem enačb, skupaj z začetnimi pogoji $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, poimenujemo *nazajšnji sistem diferencialnih enačb Kolmogorova*.

Enačbe Kolmogorova — 2

Drugi sistem enačb dobimo na podoben način, le da pogojimo slučajno spremenljivko $X(t+h)$ glede na možne vrednosti slučajne spremenljivke $X(h)$:

$$p_{ij}(t+h) = P(X(s+t+h) = j|X(s) = i) =$$

$$\sum_k P(X(s+h) = k|X(s) = i)P(X(s+t+h) = j|X(s+h) = k) =$$

$$\sum_k p_{ik}(h)p_{kj}(t).$$

Podobno kot pri Poissonovem procesu pridemo do sistema (spet označimo desni odvod z običajnim znakom za odvod):

$$p'_{ij}(t) = \lambda_i p_{i+1,j}(t) - \lambda_i p_{ij}(t), j \geqslant i. \tag{4}$$

Dobljeni sistem enačb, skupaj z začetnimi pogoji $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, poimenujemo *nazajšnji sistem diferencialnih enačb Kolmogorova*.

Enačbe Kolmogorova — 3

Za naprejšnji sistem je značilno, da smo odvod izračunali ob koncu časovnega intervala dolžine t. Za nazajšnji sistem pa je značilno, da smo ga izračunali pred pričetkom tega intervala. Zanima nas, ali znamo te diferencialne enačbe izračunati. Za naprejšnji sistem je odgovor pritrdilen, saj lahko to spet storimo po principu domin, le da se v splošnem rešitev ne da tako lepo eksplicitno zapisati.

Pri reševanju diferencialnih enačb je včasih koristna Laplaceova transformacija, predvsem zaradi lastnosti, da je

$$L_{f'}(u) + f(0) = uL_f(u).$$

Uporabimo to transformacijo na naprejšnji sistem (3), da dobimo

$$(u + \lambda_j)L_{p_{ij}}(u) = \delta_{ij} + \lambda_{j-1}L_{p_{i,j-1}(u)}, j \geqslant i.$$

Enačbe Kolmogorova — 3

Za naprejšnji sistem je značilno, da smo odvod izračunali ob koncu časovnega intervala dolžine t. Za nazajšnji sistem pa je značilno, da smo ga izračunali pred pričetkom tega intervala. Zanima nas, ali znamo te diferencialne enačbe izračunati. Za naprejšnji sistem je odgovor pritrdilen, saj lahko to spet storimo po principu domin, le da se v splošnem rešitev ne da tako lepo eksplicitno zapisati.
Pri reševanju diferencialnih enačb je včasih koristna Laplaceova transformacija, predvsem zaradi lastnosti, da je

$$L_{f'}(u) + f(0) = uL_f(u).$$

Uporabimo to transformacijo na naprejšnji sistem (3), da dobimo

$$(u + \lambda_j)L_{p_{ij}}(u) = \delta_{ij} + \lambda_{j-1}L_{p_{i,j-1}(u)}, j \geqslant i.$$

Reševanje enačb Kolmogorova

Po sistemu domin pridemo do rešitve

$$L_{p_{ij}}(u) = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\lambda_i}{u+\lambda_i} \frac{\lambda_{i+1}}{u+\lambda_{i+1}} \cdots \frac{\lambda_j}{u+\lambda_j}, j \geqslant i. \tag{5}$$

Laplaceova transformiranka funkcije prehodnih verjetnosti $p_{ij}(t)$ je torej iz naprejšnjega sistema enolično določena. Po obratni formuli (to je izrek iz teorije Laplaceovih transformacij) je s to transformiranko tudi funkcija prehodnih verjetnosti $p_{ij}(t)$ enolično določena.

Reševanje enačb Kolmogorova

Po sistemu domin pridemo do rešitve

$$L_{p_{ij}}(u) = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\lambda_i}{u+\lambda_i} \frac{\lambda_{i+1}}{u+\lambda_{i+1}} \cdots \frac{\lambda_j}{u+\lambda_j}, j \geqslant i. \tag{5}$$

Laplaceova transformiranka funkcije prehodnih verjetnosti $p_{ij}(t)$ je torej iz naprejšnjega sistema enolično določena. Po obratni formuli (to je izrek iz teorije Laplaceovih transformacij) je s to transformiranko tudi funkcija prehodnih verjetnosti $p_{ij}(t)$ enolično določena.

Kako je z nazajšnjim sistemom (4)? Najprej ga transformiramo:

$$(u+\lambda_i)L_{q_{ij}}(u) = \delta_{ij} + \lambda_i L_{q_{i+1,j}}(u), j \geqslant i.$$

Tu smo s q_{ij} označili potencialne rešitve nazajšnjega sistema. V ta sistem vstavimo rešitve naprejšnjega sistema $q_{ij} = p_{ij}$ iz (5) in tako končamo dokaz izreka:

Reševanje enačb Kolmogorova

Po sistemu domin pridemo do rešitve

$$L_{p_{ij}}(u) = \frac{1}{\lambda_j}\frac{\lambda_i}{u+\lambda_i}\frac{\lambda_{i+1}}{u+\lambda_{i+1}}\cdots\frac{\lambda_j}{u+\lambda_j}, j \geqslant i. \tag{5}$$

Laplaceova transformiranka funkcije prehodnih verjetnosti $p_{ij}(t)$ je torej iz naprejšnjega sistema enolično določena. Po obratni formuli (to je izrek iz teorije Laplaceovih transformacij) je s to transformiranko tudi funkcija prehodnih verjetnosti $p_{ij}(t)$ enolično določena.

Kako je z nazajšnjim sistemom (4)? Najprej ga transformiramo:

$$(u+\lambda_i)L_{q_{ij}}(u) = \delta_{ij} + \lambda_i L_{q_{i+1,j}}(u), j \geqslant i.$$

Tu smo s q_{ij} označili potencialne rešitve nazajšnjega sistema. V ta sistem vstavimo rešitve naprejšnjega sistema $q_{ij} = p_{ij}$ iz (5) in tako končamo dokaz izreka:

Reševanje enačb Kolmogorova — nadaljevanje

Izrek (Rešitve enačb Kolmogorova)

Za rojstne procese je naprejšnji sistem Kolmogorova vselej enolično rešljiv, rešitev tega sistema pa reši tudi nazajšnji sistem Kolmogorova.

Zakaj v izrek nismo zapisali, da je tudi nazajšnji sistem enolično rešljiv? Iz preprostega razloga, ker to v splošnem ne drži. Odvisno je namreč od zaporedja intenzivnosti λ_n. Če te naraščajo prehitro, lahko pride do ti *eksplozije v končnem času*. To se zgodi, ko število prihodov v končnem času naraste preko vseh meja.

Reševanje enačb Kolmogorova — nadaljevanje

Izrek (Rešitve enačb Kolmogorova)

Za rojstne procese je naprejšnji sistem Kolmogorova vselej enolično rešljiv, rešitev tega sistema pa reši tudi nazajšnji sistem Kolmogorova.

Zakaj v izrek nismo zapisali, da je tudi nazajšnji sistem enolično rešljiv? Iz preprostega razloga, ker to v splošnem ne drži. Odvisno je namreč od zaporedja intenzivnosti λ_n. Če te naraščajo prehitro, lahko pride do ti *eksplozije v končnem času*. To se zgodi, ko število prihodov v končnem času naraste preko vseh meja.

Natanko v teh primerih ima lahko nazajšnji sistem več rešitev. Prvi sum, da nekaj ni v redu, nam vzbudi naslednji izrek:

Reševanje enačb Kolmogorova — nadaljevanje

Izrek (Rešitve enačb Kolmogorova)

Za rojstne procese je naprejšnji sistem Kolmogorova vselej enolično rešljiv, rešitev tega sistema pa reši tudi nazajšnji sistem Kolmogorova.

Zakaj v izrek nismo zapisali, da je tudi nazajšnji sistem enolično rešljiv? Iz preprostega razloga, ker to v splošnem ne drži. Odvisno je namreč od zaporedja intenzivnosti λ_n. Če te naraščajo prehitro, lahko pride do ti *eksplozije v končnem času*. To se zgodi, ko število prihodov v končnem času naraste preko vseh meja.
Natanko v teh primerih ima lahko nazajšnji sistem več rešitev. Prvi sum, da nekaj ni v redu, nam vzbudi naslednji izrek:

Nazajšnji sistem Kolmogorova

Izrek (Rešitve nazajšnjih enačb Kolmogorova)

Če je $\{p_{ij}(t)\}$ enolična rešitev naprejšnjega sistema Kolmogorova za rojstni proces in je $\{q_{ij}(t)\}$ neka nenegativna rešitev nazajšnjega sistema Kolmogorova za ta proces, potem je

$$p_{ij}(t) \leqslant q_{ij}(t), \quad \text{za vse } i, j, t.$$

Ta rezultat nas opozarja na nekaj nenavadnega. Če bi namreč veljalo, kot bi moralo veljati, za vsak končni čas t

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(t) = 1, \tag{6}$$

potem bi iz slednjega izreka sledilo, da je tudi nazajšnji sistem enolično rešljiv. Neenoličnost torej nastopi natanko tedaj, kadar v končnem času t enačba (6) ne drži.

Nazajšnji sistem Kolmogorova

Izrek (Rešitve nazajšnjih enačb Kolmogorova)

Če je $\{p_{ij}(t)\}$ enolična rešitev naprejšnjega sistema Kolmogorova za rojstni proces in je $\{q_{ij}(t)\}$ neka nenegativna rešitev nazajšnjega sistema Kolmogorova za ta proces, potem je

$$p_{ij}(t) \leqslant q_{ij}(t), \quad \text{za vse } i, j, t.$$

Ta rezultat nas opozarja na nekaj nenavadnega. Če bi namreč veljalo, kot bi moralo veljati, za vsak končni čas t

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(t) = 1, \tag{6}$$

potem bi iz slednjega izreka sledilo, da je tudi nazajšnji sistem enolično rešljiv. Neenoličnost torej nastopi natanko tedaj, kadar v končnem času t enačba (6) ne drži.

Eksplozija rojstnega procesa

To pa je možno le, kadar v končnem času proces raste čez vsa stanja proti neskončnosti. Zato vzamemo neizpolnjenost enačbe (6) kot definicijo *eksplozije v končnem času*.

Izrek (Izrek o eksploziji)

Rojstni proces ima eksplozijo natanko tedaj, ko je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty.$$

Da bi to videli, najprej seštejmo prvih nekaj naprejšnjih enačb Kolmogorova (3) in uporabimo na njih Laplaceovo transformacijo, da dobimo

$$u \sum_{j=i}^{n} L_{p_{ij}}(u) = 1 - \lambda_n L_{p_{in}}(u).$$

Eksplozija rojstnega procesa

To pa je možno le, kadar v končnem času proces raste čez vsa stanja proti neskončnosti. Zato vzamemo neizpolnjenost enačbe (6) kot definicijo *eksplozije v končnem času*.

Izrek (Izrek o eksploziji)

Rojstni proces ima eksplozijo natanko tedaj, ko je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty.$$

Da bi to videli, najprej seštejmo prvih nekaj naprejšnjih enačb Kolmogorova (3) in uporabimo na njih Laplaceovo transformacijo, da dobimo

$$u \sum_{j=i}^{n} L_{p_{ij}}(u) = 1 - \lambda_n L_{p_{in}}(u).$$

Eksplozija rojstnega procesa — nadaljevanje

Če v to enačbo vstavimo Laplaceove transformiranke rešitev naprejšnjih enačb, dobimo

$$u \sum_{j=i}^{n} L_{p_{ij}}(u) = 1 - \prod_{j=i}^{n} \left(1 + \frac{u}{\lambda_i}\right)^{-1}.$$

Pošljimo n proti neskončno (pri primerno izbranih u) in upoštevajmo pravila iz neskončnih produktov, po katerih so ti divergentni natanko tedaj, ko so (absolutno) divergentne vrste iz logaritmov njihovih členov. Vrsta

$$\sum_{j=i}^{\infty} L_{p_{ij}}(u)$$

je torej konvergentna z limito u^{-1} natanko tedaj ko je vrsta $\sum_{j=i}^{\infty} \lambda_i^{-1}$ divergentna. Naslednjo definicijo lahko načeloma vpeljemo za poljuben slučajni proces, tj družino slučajnih spremenljivk $\{X(t) | t \in [0, \infty)\}$ s števno množico stanj S.

Eksplozija rojstnega procesa — nadaljevanje

Če v to enačbo vstavimo Laplaceove transformiranke rešitev naprejšnjih enačb, dobimo

$$u \sum_{j=i}^{n} L_{p_{ij}}(u) = 1 - \prod_{j=i}^{n} \left(1 + \frac{u}{\lambda_i}\right)^{-1}.$$

Pošljimo n proti neskončno (pri primerno izbranih u) in upoštevajmo pravila iz neskončnih produktov, po katerih so ti divergentni natanko tedaj, ko so (absolutno) divergentne vrste iz logaritmov njihovih členov. Vrsta

$$\sum_{j=i}^{\infty} L_{p_{ij}}(u)$$

je torej konvergentna z limito u^{-1} natanko tedaj ko je vrsta $\sum_{j=i}^{\infty} \lambda_i^{-1}$ divergentna. Naslednjo definicijo lahko načeloma vpeljemo za poljuben slučajni proces, tj družino slučajnih spremenljivk $\{X(t) | t \in [0, \infty)\}$ s števno množico stanj S.