Verjetnost 2
Peto poglavje
Markovske verige z zveznim časom

Matjaž Omladič

Oktober 2010

Vsebina

Šibka in krepka markovska lastnost

Pravimo, da ima proces *(šibko) markovsko lastnost*, če velja

$$P(X(t_n) = j | X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}) =$$

$$P(X(t_n) = j | X(t_{n-1}) = i_{n-1})$$

za vsa stanja $j, i_1, \ldots, i_{n-1} \in S$ in poljubno zaporedje časov $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

Za proces pa rečemo, da ima *krepko markovsko lastnost*, če za poljuben čas ustavljanja T ter poljubna dogodka A in B, kjer je A odvisen le od $\{X(t) | t > T\}$, B pa le od $\{X(t) | t \leqslant T\}$, velja

$$P(A | X(T) = i, B) = P(A | X(T) = i)$$

za vse $i \in S$. Tu smo pojem *čas ustavljanja* vpeljali po analogiji z diskretnim časom.

Šibka in krepka markovska lastnost

Pravimo, da ima proces *(šibko) markovsko lastnost*, če velja

$$P(X(t_n) = j | X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}) =$$

$$P(X(t_n) = j | X(t_{n-1}) = i_{n-1})$$

za vsa stanja $j, i_1, \ldots, i_{n-1} \in S$ in poljubno zaporedje časov $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.
Za proces pa rečemo, da ima *krepko markovsko lastnost*, če za poljuben čas ustavljanja T ter poljubna dogodka A in B, kjer je A odvisen le od $\{X(t) | t > T\}$, B pa le od $\{X(t) | t \leqslant T\}$, velja

$$P(A | X(T) = i, B) = P(A | X(T) = i)$$

za vse $i \in S$. Tu smo pojem *čas ustavljanja* vpeljali po analogiji z diskretnim časom.

To pomeni:

Šibka in krepka markovska lastnost

Pravimo, da ima proces *(šibko) markovsko lastnost*, če velja

$$P(X(t_n) = j | X(t_1) = i_1, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}) =$$

$$P(X(t_n) = j | X(t_{n-1}) = i_{n-1})$$

za vsa stanja $j, i_1, \dots, i_{n-1} \in S$ in poljubno zaporedje časov $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.
Za proces pa rečemo, da ima *krepko markovsko lastnost*, če za poljuben čas ustavljanja T ter poljubna dogodka A in B, kjer je A odvisen le od $\{X(t) | t > T\}$, B pa le od $\{X(t) | t \leqslant T\}$, velja

$$P(A | X(T) = i, B) = P(A | X(T) = i)$$

za vse $i \in S$. Tu smo pojem *čas ustavljanja* vpeljali po analogiji z diskretnim časom.
To pomeni:

Šibka in krepka markovska lastnost – nadaljevanje

Slučajno spremenljivko T (z vrednostmi v nenegativnih realnih številih) poimenujemo *čas ustavljanja* (glede na dani proces $\{X(t)|t \in [0, \infty)\}$), če velja, da je pri poljubnem $t \geqslant 0$ dogodek $\{T \leqslant t\}$ odvisen le od slučajnih spremenljivk $\{X(s); s \leqslant t\}$.

Navedimo dva izreka:

Izrek

Če ima proces krepko markovsko lastnost, potem ima tudi šibko markovsko lastnost.

Šibka in krepka markovska lastnost – nadaljevanje

Slučajno spremenljivko T (z vrednostmi v nenegativnih realnih številih) poimenujemo *čas ustavljanja* (glede na dani proces $\{X(t)|t \in [0, \infty)\}$), če velja, da je pri poljubnem $t \geqslant 0$ dogodek $\{T \leqslant t\}$ odvisen le od slučajnih spremenljivk $\{X(s); s \leqslant t\}$.

Navedimo dva izreka:

Izrek

Če ima proces krepko markovsko lastnost, potem ima tudi šibko markovsko lastnost.

Izrek

Rojstni proces ima krepko markovsko lastnost.

Šibka in krepka markovska lastnost – nadaljevanje

Slučajno spremenljivko T (z vrednostmi v nenegativnih realnih številih) poimenujemo *čas ustavljanja* (glede na dani proces $\{X(t)|t \in [0, \infty)\}$), če velja, da je pri poljubnem $t \geqslant 0$ dogodek $\{T \leqslant t\}$ odvisen le od slučajnih spremenljivk $\{X(s); s \leqslant t\}$.
Navedimo dva izreka:

Izrek

Če ima proces krepko markovsko lastnost, potem ima tudi šibko markovsko lastnost.

Izrek

Rojstni proces ima krepko markovsko lastnost.

Toda vrnimo se k splošnejšim *markovskim verigam (v zveznem času)*. Tako pravimo slučajnemu procesu, tj družini slučajnih spremenljivk $\{X(t)|t \in [0, \infty)\}$ s števno množico stanj S, ki zadošča (šibki) markovski lastnosti.

Šibka in krepka markovska lastnost – nadaljevanje

Slučajno spremenljivko T (z vrednostmi v nenegativnih realnih številih) poimenujemo *čas ustavljanja* (glede na dani proces $\{X(t)|t \in [0,\infty)\}$), če velja, da je pri poljubnem $t \geqslant 0$ dogodek $\{T \leqslant t\}$ odvisen le od slučajnih spremenljivk $\{X(s); s \leqslant t\}$. Navedimo dva izreka:

Izrek

Če ima proces krepko markovsko lastnost, potem ima tudi šibko markovsko lastnost.

Izrek

Rojstni proces ima krepko markovsko lastnost.

Toda vrnimo se k splošnejšim *markovskim verigam (v zveznem času)*. Tako pravimo slučajnemu procesu, tj družini slučajnih spremenljivk $\{X(t)|t \in [0,\infty)\}$ s števno množico stanj S, ki zadošča (šibki) markovski lastnosti.

Prehodne verjetnosti

Za markovsko verigo vpeljemo pojem *prehodne verjetnosti*

$$P(X(t) = j | X(s) = i) \tag{1}$$

za $s \leqslant t$. Za markovsko verigo pravimo, da je *homogena*, če so verjetnosti, opredeljene z (1), vselej odvisne le od razlike med obema časovnima točkama, torej od $t - s$. V nadaljevanju se bomo omejili le na markovske verige s to lastnostjo. Prehodno verjetnost (1) označimo v tem primeru s.

$$p_{ij}(t - s)$$

Izrek (Enačbe Chapman-Kolmogorov)

Za prehodne verjetnosti (homogene) markovske verige velja sistem enačb

$$p_{ij}(s + t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t)$$

Prehodne verjetnosti

Za markovsko verigo vpeljemo pojem *prehodne verjetnosti*

$$P(X(t) = j | X(s) = i) \tag{1}$$

za $s \leqslant t$. Za markovsko verigo pravimo, da je *homogena*, če so verjetnosti, opredeljene z (1), vselej odvisne le od razlike med obema časovnima točkama, torej od $t - s$. V nadaljevanju se bomo omejili le na markovske verige s to lastnostjo. Prehodno verjetnost (1) označimo v tem primeru s.

$$p_{ij}(t - s)$$

Izrek (Enačbe Chapman-Kolmogorov)

Za prehodne verjetnosti (homogene) markovske verige velja sistem enačb

$$p_{ij}(s + t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t)$$

Polgrupna lastnost

Prehodne verjetnosti zapišemo v prehodno matriko "velikosti" $|S| \times |S|$:

$$P(t) = \{p_{ij}(t)\},$$

za $t \in [0, \infty)$. Te matrike imajo naslednje lastnosti.

- (*pozitivnost*) $p_{ij}(t) \geqslant 0$
- (*normiranost*) $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$
- $P(0) = I$
- (*polgrupna lastnost*) $P(s + t) = P(s)P(t)$

Polgrupna lastnost

Prehodne verjetnosti zapišemo v prehodno matriko "velikosti" $|S| \times |S|$:

$$P(t) = \{p_{ij}(t)\},$$

za $t \in [0, \infty)$. Te matrike imajo naslednje lastnosti.

- (*pozitivnost*) $p_{ij}(t) \geqslant 0$
- (*normiranost*) $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$
- $P(0) = I$
- (*polgrupna lastnost*) $P(s+t) = P(s)P(t)$

Prvo in drugo lastnost skupaj poimenujemo *stohastičnost* matrike. Četrta lastnost je matrično zapisan sistem enačb Chapman-Kolmogorov. V tem zapisu jo poimenujemo *polgrupna lastnost*. Zaradi vseh teh lastnosti pravimo družini

$$\{P(t) | t \in [0, \infty)\}$$

stohastična polgrupa matrik.

Polgrupna lastnost

Prehodne verjetnosti zapišemo v prehodno matriko "velikosti" $|S| \times |S|$:

$$P(t) = \{p_{ij}(t)\},$$

za $t \in [0, \infty)$. Te matrike imajo naslednje lastnosti.

- (*pozitivnost*) $p_{ij}(t) \geqslant 0$
- (*normiranost*) $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$
- $P(0) = I$
- (*polgrupna lastnost*) $P(s+t) = P(s)P(t)$

Prvo in drugo lastnost skupaj poimenujemo *stohastičnost* matrike. Četrta lastnost je matrično zapisan sistem enačb Chapman-Kolmogorov. V tem zapisu jo poimenujemo *polgrupna lastnost*. Zaradi vseh teh lastnosti pravimo družini

$$\{P(t) | t \in [0, \infty)\}$$

stohastična polgrupa matrik.

Generator polgrupe – 1

Za polgrupo $\{P(t)|t \in [0,\infty)\}$ pravimo, da je *standardna*, če velja (limito razumemo po komponentah)

$$P(t) \to I \quad \text{ko gre} \quad t \downarrow 0.$$

Standardne polgrupe imajo vrsto lastnosti, ki jih bomo navedli, a jih ne bomo preverjali. Vprašajmo se, kaj se lahko zgodi na kratkem intervalu $(t, t+h)$ pod pogojem, da velja $X(t) = i$.

- Veriga lahko ostane v istem stanju z verjetnostjo $p_{ii}(h) + o(h)$.
- Veriga se lahko premakne v stanje $j \neq i$ z verjetnostjo $p_{ij}(h) + o(h)$.
- Obstaja taka konstanta g_{ii}, da velja $p_{ii}(h) = 1 + g_{ii}h + o(h)$.
- Za vsak $j \neq i$ obstaja taka konstanta g_{ij}, da velja $p_{ij}(h) = g_{ij}h + o(h)$.
- $\sum_j g_{ij} = 0$ za vse $i \in S$.

Generator polgrupe — 1

Za polgrupo $\{P(t)|t \in [0, \infty)\}$ pravimo, da je *standardna*, če velja (limito razumemo po komponentah)

$$P(t) \to I \quad \text{ko gre} \quad t \downarrow 0.$$

Standardne polgrupe imajo vrsto lastnosti, ki jih bomo navedli, a jih ne bomo preverjali. Vprašajmo se, kaj se lahko zgodi na kratkem intervalu $(t, t+h)$ pod pogojem, da velja $X(t) = i$.

- Veriga lahko ostane v istem stanju z verjetnostjo $p_{ii}(h) + o(h)$.
- Veriga se lahko premakne v stanje $j \neq i$ z verjetnostjo $p_{ij}(h) + o(h)$.
- Obstaja taka konstanta g_{ii}, da velja $p_{ii}(h) = 1 + g_{ii}h + o(h)$.
- Za vsak $j \neq i$ obstaja taka konstanta g_{ij}, da velja $p_{ij}(h) = g_{ij}h + o(h)$.
- $\sum_j g_{ij} = 0$ za vse $i \in S$.

Generator polgrupe — 2

Števila g_{ij} postavimo v matriko "velikosti" $|S| \times |S|$, ki jo označimo z G in poimenujemo *generator polgrupe* $\{P(t)|t \in [0, \infty)\}$. Drugo in tretjo lastnost zgoraj zdaj lahko zapišemo v matrični obliki

$$G = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(h) - I}{h}.$$

G je torej desni odvod polgrupe v točki $h = 0$. Peti pogoj nam pove, da je vsota vsake vrstice generatorja enaka 0. Po definiciji so njegovi izvendiagonalni elementi vsi nenegativni. Peti pogoj nam potem pove, da so diagonalni elementi vsi nepozitivni.

Generator polgrupe — 2

Števila g_{ij} postavimo v matriko "velikosti" $|S| \times |S|$, ki jo označimo z G in poimenujemo *generator polgrupe* $\{P(t)|t \in [0, \infty)\}$. Drugo in tretjo lastnost zgoraj zdaj lahko zapišemo v matrični obliki

$$G = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(h) - I}{h}.$$

G je torej desni odvod polgrupe v točki $h = 0$. Peti pogoj nam pove, da je vsota vsake vrstice generatorja enaka 0. Po definiciji so njegovi izvendiagonalni elementi vsi nenegativni. Peti pogoj nam potem pove, da so diagonalni elementi vsi nepozitivni. Dva pomembna zgleda: *Generator rojstnega procesa* ima po prvi naddiagonali intenzivnosti rojstev in po diagonali iste intenzivnosti z negativnim predznakom. *Generator rojstno-smrtnega procesa* ima po prvi naddiagonali intenzivnosti rojstev, po prvi poddiagonali intenzivnosti smrti in po diagonali vsote obeh intenzivnosti z negativnim predznakom.

Generator polgrupe — 2

Števila g_{ij} postavimo v matriko "velikosti" $|S| \times |S|$, ki jo označimo z G in poimenujemo *generator polgrupe* $\{P(t) | t \in [0, \infty)\}$. Drugo in tretjo lastnost zgoraj zdaj lahko zapišemo v matrični obliki

$$G = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(h) - I}{h}.$$

G je torej desni odvod polgrupe v točki $h = 0$. Peti pogoj nam pove, da je vsota vsake vrstice generatorja enaka 0. Po definiciji so njegovi izvendiagonalni elementi vsi nenegativni. Peti pogoj nam potem pove, da so diagonalni elementi vsi nepozitivni. Dva pomembna zgleda: *Generator rojstnega procesa* ima po prvi naddiagonali intenzivnosti rojstev in po diagonali iste intenzivnosti z negativnim predznakom. *Generator rojstno-smrtnega procesa* ima po prvi naddiagonali intenzivnosti rojstev, po prvi poddiagonali intenzivnosti smrti in po diagonali vsote obeh intenzivnosti z negativnim predznakom.

Diferencialne enačbe Kolmogorova — 1

Izpeljimo sistem diferencialnih enačb Kolmogorova za splošne markovske verige. V naslednjem računu upoštevajmo enačbe Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(h) - \sum_k p_{ik}(t)\delta_{kj}$$
$$= \sum_k p_{ik}(t)(p_{kj}(h) - \delta_{kj}).$$

Delimo s h in pošljemo h navzdol proti 0, da dobimo (za desne odvode)

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)g_{kj}.$$

Isti račun ponovimo v matrični obliki

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{P(t)P(h) - P(t)}{h} = P(t)\frac{P(h) - I}{h}$$

In v limiti $P'(t) = P(t)G$.

Diferencialne enačbe Kolmogorova — 1

Izpeljimo sistem diferencialnih enačb Kolmogorova za splošne markovske verige. V naslednjem računu upoštevajmo enačbe Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(h) - \sum_k p_{ik}(t)\delta_{kj}$$

$$= \sum_k p_{ik}(t)(p_{kj}(h) - \delta_{kj}).$$

Delimo s h in pošljemo h navzdol proti 0, da dobimo (za desne odvode)

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)g_{kj}.$$

Isti račun ponovimo v matrični obliki

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{P(t)P(h) - P(t)}{h} = P(t)\frac{P(h) - I}{h}$$

In v limiti $P'(t) = P(t)G$.

Diferencialne enačbe Kolmogorova — 2

Tako smo dobili *naprejšnji sistem diferencialnih enačb Kolmogorova*

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) g_{kj}, \quad \text{oziroma} \quad P'(t) = P(t)G. \qquad (2)$$

V izpeljavi drugega sistema zamenjamo vlogo t in h, ko uporabimo polgrupno lastnost. Tokrat naredimo le matrični račun.

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{P(h)P(t) - P(t)}{h} = \frac{P(h) - I}{h} P(t)$$

Diferencialne enačbe Kolmogorova — 2

Tako smo dobili *naprejšnji sistem diferencialnih enačb Kolmogorova*

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) g_{kj}, \quad \text{oziroma} \quad P'(t) = P(t)G. \tag{2}$$

V izpeljavi drugega sistema zamenjamo vlogo t in h, ko uporabimo polgrupno lastnost. Tokrat naredimo le matrični račun.

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{P(h)P(t) - P(t)}{h} = \frac{P(h) - I}{h} P(t)$$

In v limiti $P'(t) = GP(t)$. *Nazajšnji sistem diferencialnih enačb Kolmogorova* je torej

$$p'_{ij}(t) = \sum_k g_{ik} p_{kj}(t), \quad \text{oziroma} \quad P'(t) = GP(t). \tag{3}$$

Diferencialne enačbe Kolmogorova – 2

Tako smo dobili *naprejšnji sistem diferencialnih enačb Kolmogorova*

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) g_{kj}, \quad \text{oziroma} \quad P'(t) = P(t)G. \tag{2}$$

V izpeljavi drugega sistema zamenjamo vlogo t in h, ko uporabimo polgrupno lastnost. Tokrat naredimo le matrični račun.

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{P(h)P(t) - P(t)}{h} = \frac{P(h) - I}{h} P(t)$$

In v limiti $P'(t) = GP(t)$. *Nazajšnji sistem diferencialnih enačb Kolmogorova* je torej

$$p'_{ij}(t) = \sum_k g_{ik} p_{kj}(t), \quad \text{oziroma} \quad P'(t) = GP(t). \tag{3}$$

Rešitve diferencialnih enačb Kolmogorova

Diferencialne enačbe Kolmogorova rešujemo skupaj z začetnim pogojem $P(0) = I$. Podobne enačbe nastopajo v mnogih aplikacijah v naravoslovju, tehniki in ekonomiji. Največ aplikacij je v ti *teoriji sistemov*. Rešitve se dajo pogosto zapisati v obliki

$$P(t) = e^{tG} \quad \text{oziroma} \quad P(t) = \exp(tG). \tag{4}$$

Tu definiramo eksponentno funkcijo s pomočjo vrste

$$\exp(tG) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} G^n,$$

kjer pa nastopi vprašanje konvergence.

Rešitve diferencialnih enačb Kolmogorova

Diferencialne enačbe Kolmogorova rešujemo skupaj z začetnim pogojem $P(0) = I$. Podobne enačbe nastopajo v mnogih aplikacijah v naravoslovju, tehniki in ekonomiji. Največ aplikacij je v ti *teoriji sistemov*. Rešitve se dajo pogosto zapisati v obliki

$$P(t) = e^{tG} \quad \text{oziroma} \quad P(t) = \exp(tG). \tag{4}$$

Tu definiramo eksponentno funkcijo s pomočjo vrste

$$\exp(tG) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} G^n,$$

kjer pa nastopi vprašanje konvergence.

Drugo tehnično vprašanje je, pod kakšnimi pogoji smemo vrsto odvajati členoma. Če je to možno, potem je jasno, da dobljena matrična funkcija reši tako naprejšnji kot nazajšnji sitem Kolmogorova, izpolnjuje pa tudi začetni pogoj.

Rešitve diferencialnih enačb Kolmogorova

Diferencialne enačbe Kolmogorova rešujemo skupaj z začetnim pogojem $P(0) = I$. Podobne enačbe nastopajo v mnogih aplikacijah v naravoslovju, tehniki in ekonomiji. Največ aplikacij je v ti *teoriji sistemov*. Rešitve se dajo pogosto zapisati v obliki

$$P(t) = e^{tG} \quad \text{oziroma} \quad P(t) = \exp(tG). \tag{4}$$

Tu definiramo eksponentno funkcijo s pomočjo vrste

$$\exp(tG) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} G^n,$$

kjer pa nastopi vprašanje konvergence.
Drugo tehnično vprašanje je, pod kakšnimi pogoji smemo vrsto odvajati členoma. Če je to možno, potem je jasno, da dobljena matrična funkcija reši tako naprejšnji kot nazajšnji sitem Kolmogorova, izpolnjuje pa tudi začetni pogoj.

Čas zadrževanja

Izberimo neko stanje i in čas t ter privzemimo pogoj $X(t) = i$. Vpeljimo *čas zadrževanja* (v tem stanju oz. pred naslednjim prehodom), kar je soroden čas, kot *medprihodni čas*

$$T = \inf\{s \geqslant 0; X(t+s) \neq i\}$$

Tedaj velja

- T je porazdeljen eksponentno s parametrom $-g_{ii}$.

To sledi preprosto iz dejstva, da ima T lastnost nepomnjenja

$$P(T > r+s | T > r) = P(T > r+s | X(t+r) = i) = P(T > s)$$

pri poljubnih pozitivnih r in s. Parameter dobimo z odvajanjem repne verjetnosti. Velja tudi:

Čas zadrževanja

Izberimo neko stanje i in čas t ter privzemimo pogoj $X(t) = i$. Vpeljimo *čas zadrževanja* (v tem stanju oz. pred naslednjim prehodom), kar je soroden čas, kot *medprihodni čas*

$$T = \inf\{s \geqslant 0; X(t+s) \neq i\}$$

Tedaj velja

- T je porazdeljen eksponentno s parametrom $-g_{ii}$.

To sledi preprosto iz dejstva, da ima T lastnost nepomnjenja

$$P(T > r+s | T > r) = P(T > r+s | X(t+r) = i) = P(T > s)$$

pri poljubnih pozitivnih r in s. Parameter dobimo z odvajanjem repne verjetnosti. Velja tudi:

- V trenutku, ko veriga zapusti stanje i, je verjetnost, da bo prešla v stanje $j \neq i$ enaka $-\frac{g_{ij}}{g_{ii}}$.

Čas zadrževanja

Izberimo neko stanje i in čas t ter privzemimo pogoj $X(t) = i$. Vpeljimo *čas zadrževanja* (v tem stanju oz. pred naslednjim prehodom), kar je soroden čas, kot *medprihodni čas*

$$T = \inf\{s \geqslant 0; X(t+s) \neq i\}$$

Tedaj velja

- T je porazdeljen eksponentno s parametrom $-g_{ii}$.

To sledi preprosto iz dejstva, da ima T lastnost nepomnjenja

$$P(T > r+s | T > r) = P(T > r+s | X(t+r) = i) = P(T > s)$$

pri poljubnih pozitivnih r in s. Parameter dobimo z odvajanjem repne verjetnosti. Velja tudi:

- V trenutku, ko veriga zapusti stanje i, je verjetnost, da bo prešla v stanje $j \neq i$ enaka $-\frac{g_{ij}}{g_{ii}}$.

Lévyjeva dihotomija

Klasifikacija stanj je pri verigah z zveznim časom presenetljivo bolj enostavna kot v primeru diskretnega časa. Najprej se izkaže, da velja.

- (Lévyjeva dihotomija) Za poljubni stanji i in j velja bodisi $p_{ij}(t) = 0$ za vse $t > 0$ bodisi $p_{ij}(t) > 0$ za vse $t > 0$. V primeru $i = j$ velja le druga od obeh možnosti.

Dokaz druge od obeh trditev je lažji. Ker je veriga standardna, konvergira $p_{ii}(t)$ s $t \downarrow 0$ proti 1. Zato obstaja tak $h > 0$, da je $p_{ii}(t) > 0$ za vse $t \in [0, h]$. Izberimo zdaj $t > 0$ poljuben in dovolj velik n, da je $hn > t$. Po enačbi Chapman-Kolmogorov je tedaj

$$p_{ii}(t) \geqslant \left(p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n > 0.$$

Lévyjeva dihotomija

Klasifikacija stanj je pri verigah z zveznim časom presenetljivo bolj enostavna kot v primeru diskretnega časa. Najprej se izkaže, da velja.

- (Lévyjeva dihotomija) Za poljubni stanji i in j velja bodisi $p_{ij}(t) = 0$ za vse $t > 0$ bodisi $p_{ij}(t) > 0$ za vse $t > 0$. V primeru $i = j$ velja le druga od obeh možnosti.

Dokaz druge od obeh trditev je lažji. Ker je veriga standardna, konvergira $p_{ii}(t)$ s $t \downarrow 0$ proti 1. Zato obstaja tak $h > 0$, da je $p_{ii}(t) > 0$ za vse $t \in [0, h]$. Izberimo zdaj $t > 0$ poljuben in dovolj velik n, da je $hn > t$. Po enačbi Chapman-Kolmogorov je tedaj

$$p_{ii}(t) \geqslant \left(p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n > 0.$$

Za primer $i \neq j$ dokažemo s podobnim trikom obstoj takega $h > 0$, da je $p_{ij}(t) > 0$ za vse $t > h$ in $p_{ij}(t) = 0$ za vse $t \leqslant h$. Bistveno težje je dokazati, da je bodisi $h = 0$ bodisi $h = \infty$.

Lévyjeva dihotomija

Klasifikacija stanj je pri verigah z zveznim časom presenetljivo bolj enostavna kot v primeru diskretnega časa. Najprej se izkaže, da velja.

- (Lévyjeva dihotomija) Za poljubni stanji i in j velja bodisi $p_{ij}(t) = 0$ za vse $t > 0$ bodisi $p_{ij}(t) > 0$ za vse $t > 0$. V primeru $i = j$ velja le druga od obeh možnosti.

Dokaz druge od obeh trditev je lažji. Ker je veriga standardna, konvergira $p_{ii}(t)$ s $t \downarrow 0$ proti 1. Zato obstaja tak $h > 0$, da je $p_{ii}(t) > 0$ za vse $t \in [0, h]$. Izberimo zdaj $t > 0$ poljuben in dovolj velik n, da je $hn > t$. Po enačbi Chapman-Kolmogorov je tedaj

$$p_{ii}(t) \geqslant \left(p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n > 0.$$

Za primer $i \neq j$ dokažemo s podobnim trikom obstoj takega $h > 0$, da je $p_{ij}(t) > 0$ za vse $t > h$ in $p_{ij}(t) = 0$ za vse $t \leqslant h$. Bistveno težje je dokazati, da je bodisi $h = 0$ bodisi $h = \infty$.

Stacionarna porazdelitev

Lévyjeva dihotomija nam med drugim pove, da verige z zveznim časom ne poznajo cikličnega obnašanja. Naj bo π neka verjetnostna porazdelitev po stanjih verige, to pomeni, da je $\pi = \{\pi_i | i \in S\}$ z lastnostjo $\pi_i \geqslant 0$ za $i \in S$ in $\sum_i \pi_i = 1$. Na π gledamo kot na neko vrstico, s katero lahko potem množimo prehodno matriko z leve.

Izrek (Stacionarna porazdelitev)

Za verjetnostno porazdelitev π po stanjih sta ekvivalentni trditvi

- *π je levi lastni vektor pri lastni vrednosti 1 prehodne matrike $P(t)$ ta vse $t \geqslant 0$, torej je $\pi P(t) = \pi$.*
- *π je levi lastni vektor pri lastni vrednosti 0 generatorja G, torej je $\pi G = 0$.*

Stacionarna porazdelitev

Lévyjeva dihotomija nam med drugim pove, da verige z zveznim časom ne poznajo cikličnega obnašanja. Naj bo π neka verjetnostna porazdelitev po stanjih verige, to pomeni, da je $\pi = \{\pi_i | i \in S\}$ z lastnostjo $\pi_i \geqslant 0$ za $i \in S$ in $\sum_i \pi_i = 1$. Na π gledamo kot na neko vrstico, s katero lahko potem množimo prehodno matriko z leve.

Izrek (Stacionarna porazdelitev)

Za verjetnostno porazdelitev π po stanjih sta ekvivalentni trditvi

- *π je levi lastni vektor pri lastni vrednosti 1 prehodne matrike $P(t)$ ta vse $t \geqslant 0$, torej je $\pi P(t) = \pi$.*
- *π je levi lastni vektor pri lastni vrednosti 0 generatorja G, torej je $\pi G = 0$.*

Stacionarna porazdelitev – nadaljevanje

Prva od teh lastnosti nam pove, da v primeru, ko je veriga porazdeljena s π v časovni točki $t = 0$, potem ima to porazdelitev od tega trenutka dalje za vselej, torej za vse $t > 0$. Druga lastnost pa je primernejša za računanje stacionarne porazdelitve, saj je potrebno izračunati lastni vektor samo za eno matriko, tj G.

Dokaz iz prve v drugo točko gre po definiciji, saj je

$$\pi G = \lim_{h \downarrow 0} \left[\frac{1}{h} (\pi P(h) - \pi) \right] = 0.$$

Stacionarna porazdelitev – nadaljevanje

Prva od teh lastnosti nam pove, da v primeru, ko je veriga porazdeljena s π v časovni točki $t = 0$, potem ima to porazdelitev od tega trenutka dalje za vselej, torej za vse $t > 0$. Druga lastnost pa je primernejša za računanje stacionarne porazdelitve, saj je potrebno izračunati lastni vektor samo za eno matriko, tj G.

Dokaz iz prve v drugo točko gre po definiciji, saj je

$$\pi G = \lim_{h \downarrow 0} \left[\frac{1}{h} (\pi P(h) - \pi) \right] = 0.$$

Idejo dokaza v obratno smer navedimo samo za primer, ko se da polgrupa zapisati z eksponetno vrsto. V tem primeru je

$$\pi P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \pi G^k = \pi$$

Stacionarna porazdelitev — nadaljevanje

Prva od teh lastnosti nam pove, da v primeru, ko je veriga porazdeljena s π v časovni točki $t = 0$, potem ima to porazdelitev od tega trenutka dalje za vselej, torej za vse $t > 0$. Druga lastnost pa je primernejša za računanje stacionarne porazdelitve, saj je potrebno izračunati lastni vektor samo za eno matriko, tj G.

Dokaz iz prve v drugo točko gre po definiciji, saj je

$$\pi G = \lim_{h \downarrow 0} \left[\frac{1}{h} (\pi P(h) - \pi) \right] = 0.$$

Idejo dokaza v obratno smer navedimo samo za primer, ko se da polgrupa zapisati z eksponetno vrsto. V tem primeru je

$$\pi P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \pi G^k = \pi$$

Nerazcepne verige

Za verigo pravimo, da je *nerazcepna*, če za poljubni stanji $i \neq j \in S$ obstaja tak čas $t > 0$, da je $p_{ij}(t) > 0$. Po Lèvyjevi dihotomiji potem velja $p_{ij}(t) > 0$ za vse $t > 0$. Markovski verigi z zveznim časom priredimo markovsko verigo z diskretnim časom, katere prehodne verjetnosti so enake $-\dfrac{g_{ij}}{g_{ii}}$ za $j \neq i$. Pravimo ji prvotni verigi *vpeta markovska veriga*.

- Markovska veriga je nerazcepna natanko tedaj, kadar je nerazcepna njej vpeta markovska veriga z diskretnim časom.

Nerazcepne verige

Za verigo pravimo, da je *nerazcepna*, če za poljubni stanji $i \neq j \in S$ obstaja tak čas $t > 0$, da je $p_{ij}(t) > 0$. Po Lèvyjevi dihotomiji potem velja $p_{ij}(t) > 0$ za vse $t > 0$. Markovski verigi z zveznim časom priredimo markovsko verigo z diskretnim časom, katere prehodne verjetnosti so enake $-\dfrac{g_{ij}}{g_{ii}}$ za $j \neq i$. Pravimo ji prvotni verigi *vpeta markovska veriga*.

- Markovska veriga je nerazcepna natanko tedaj, kadar je nerazcepna njej vpeta markovska veriga z diskretnim časom.

Obnašanje markovske verige z zveznim časom popišemo z dvema podatkoma. Prvi podatek so časi zadrževanja v vsakem od stanj, drugi podatek pa so skoki med stanji, ki jih popiše vpeta veriga. Dosegljivost nekega stanja iz nekega drugega stanja v zveznem času mora biti torej ekvivalentna z dosegljivostjo med njima v diskretnem času.

Nerazcepne verige

Za verigo pravimo, da je *nerazcepna*, če za poljubni stanji $i \neq j \in S$ obstaja tak čas $t > 0$, da je $p_{ij}(t) > 0$. Po Lèvyjevi dihotomiji potem velja $p_{ij}(t) > 0$ za vse $t > 0$. Markovski verigi z zveznim časom priredimo markovsko verigo z diskretnim časom, katere prehodne verjetnosti so enake $-\dfrac{g_{ij}}{g_{ii}}$ za $j \neq i$. Pravimo ji prvotni verigi *vpeta markovska veriga*.

- Markovska veriga je nerazcepna natanko tedaj, kadar je nerazcepna njej vpeta markovska veriga z diskretnim časom.

Obnašanje markovske verige z zveznim časom popišemo z dvema podatkoma. Prvi podatek so časi zadrževanja v vsakem od stanj, drugi podatek pa so skoki med stanji, ki jih popiše vpeta veriga. Dosegljivost nekega stanja iz nekega drugega stanja v zveznem času mora biti torej ekvivalentna z dosegljivostjo med njima v diskretnem času.

Ergodijski izrek

Izrek (Ergodijski izrek)

Naj bo X nerazcepna markovska veriga s standardno polgrupo prehodnih matrik $P(t)$. Tedaj velja:

- *Če obstaja stacionarna porazdelitev π, potem je ta enolična in velja $p_{ij}(t) \to \pi_j$, ko gre $t \to \infty$, za vse $i, j \in S$ neodvisno od i.*
- *Če ne obstaja stacionarna porazdelitev, potem velja $p_{ij}(t) \to 0$, ko gre $t \to \infty$ za vse $i, j \in S$ neodvisno od i.*

Tokrat uporabimo (na primer) metodo *okostja*. Tako pravimo markovski verigi z diskretnim časom Y, ki jo priredimo markovski verigi z zveznim časom X pri nekem $h > 0$ tako, da za njeno prehodno matriko enega koraka vzamemo $Q = P(h)$. Po enačbah Chapman-Kolmogorov je tedaj $Q^n = P(nh)$.

Ergodijski izrek

Izrek (Ergodijski izrek)

Naj bo X nerazcepna markovska veriga s standardno polgrupo prehodnih matrik $P(t)$. Tedaj velja:

- *Če obstaja stacionarna porazdelitev π, potem je ta enolična in velja $p_{ij}(t) \to \pi_j$, ko gre $t \to \infty$, za vse $i, j \in S$ neodvisno od i.*
- *Če ne obstaja stacionarna porazdelitev, potem velja $p_{ij}(t) \to 0$, ko gre $t \to \infty$ za vse $i, j \in S$ neodvisno od i.*

Tokrat uporabimo (na primer) metodo *okostja*. Tako pravimo markovski verigi z diskretnim časom Y, ki jo priredimo markovski verigi z zveznim časom X pri nekem $h > 0$ tako, da za njeno prehodno matriko enega koraka vzamemo $Q = P(h)$. Po enačbah Chapman-Kolmogorov je tedaj $Q^n = P(nh)$.

Ergodijski izrek — nadaljevanje

Na okostju uporabimo ergodijski izrek za diskretne verige in ugotovimo, da obstaja iskana limita (pozitivna ali ničelna) na podzaporedjih $t_n = nh$; označimo jo s π^h. Pri dveh različnih racionalno odvisnih h_1 in h_2 imata pripadajoči podzaporedji neskončno mnogo skupnih točk in zato isto limito $\pi^{h_1} = \pi^{h_2}$. Uporabimo še zveznost polgrupe $P(t)$.

Zgled. Markovska veriga je rojstno-smrtni proces natanko tedaj, kadar je njej vpeta veriga slučajni sprehod. Naj bodo intenzivnosti rojstev enake λ_n, intenzivnosti smrti pa μ_n. Čas zadrževanja v stanju n je porazdeljen eksponentno s parametrom $\lambda_n + \mu_n$, verjetnost rojstva (ob preskoku) je

$$p_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n},$$

verjetnost smrti pa

$$1 - p_n = \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n}.$$

Ergodijski izrek — nadaljevanje

Na okostju uporabimo ergodijski izrek za diskretne verige in ugotovimo, da obstaja iskana limita (pozitivna ali ničelna) na podzaporedjih $t_n = nh$; označimo jo s π^h. Pri dveh različnih racionalno odvisnih h_1 in h_2 imata pripadajoči podzaporedji neskončno mnogo skupnih točk in zato isto limito $\pi^{h_1} = \pi^{h_2}$. Uporabimo še zveznost polgrupe $P(t)$.

Zgled. Markovska veriga je rojstno-smrtni proces natanko tedaj, kadar je njej vpeta veriga slučajni sprehod. Naj bodo intenzivnosti rojstev enake λ_n, intenzivnosti smrti pa μ_n. Čas zadrževanja v stanju n je porazdeljen eksponentno s parametrom $\lambda_n + \mu_n$, verjetnost rojstva (ob preskoku) je

$$p_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n},$$

verjetnost smrti pa

$$1 - p_n = \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n}.$$