Verjetnost 2
Deveto poglavje
Uporaba metod MCMC pri vrednotenju finančnih sredstev

Matjaž Omladič

Oktober 2010 – Januar 2011

Vsebina

Opredelitev problema

Tipičen model, ki se uporablja pri vrednotenju finančnih sredstev v zadnjih letih vsebuje naslednje sestavine

- Faktorji ekonomije, ki odločilno vplivajo na sistem so označeni npr z F_t.
- Vektor Brownovih gibanj W_t predstavlja zvezni del vpliva na dogajanje.
- Proces štetja N_t modelira skoke v sistemu E_j, ki so porazdeljeni eksponentno za $j = 1, 2, \dots, N_t$.
- Tendenca gibanj je podana z znano funkcijo μ.
- Nestanovitnost je prav tako znana in podana s funkcijo σ.
- V ozadju deluje vrsta neznanih količin, ki jih vnesemo v sistem kot parametre θ.
- Poleg vseh teh količin imamo še "stanja" sistema, kot so npr časi in velikosti skokov.

Privzamemo, da se te količine pokoravajo neki stohastični diferencialni enačbi

Opredelitev problema

Tipičen model, ki se uporablja pri vrednotenju finančnih sredstev v zadnjih letih vsebuje naslednje sestavine

- Faktorji ekonomije, ki odločilno vplivajo na sistem so označeni npr z F_t.
- Vektor Brownovih gibanj W_t predstavlja zvezni del vpliva na dogajanje.
- Proces štetja N_t modelira skoke v sistemu E_j, ki so porazdeljeni eksponentno za $j = 1, 2, \ldots, N_t$.
- Tendenca gibanj je podana z znano funkcijo μ.
- Nestanovitnost je prav tako znana in podana s funkcijo σ.
- V ozadju deluje vrsta neznanih količin, ki jih vnesemo v sistem kot parametre θ.
- Poleg vseh teh količin imamo še "stanja" sistema, kot so npr časi in velikosti skokov.

Privzamemo, da se te količine pokoravajo neki stohastični diferencialni enačbi

Opredelitev problema — nadaljevanje

$$dF_t = \mu(F_t, \theta)dt + \sigma(F_t, \theta)dW_t + d\left(\sum_{j=1}^{N_t} E_j\right)$$

Pri danih spremenljivkah stanja želimo vrednotiti finančna sredstva s pomočjo argumentov arbitraže in ravnotežja. Pri tem poznamo dve vrsti cen. Prva vrsta cen, ki jih navadno označimo z vektorjem S_t in jih modeliramo dinamično, so npr cene kapitala, kapitalskih indeksov in deviznih tečajev. Druge so navadno vrednosti izvedenih inštrumentov, ki nas pogosto zanimajo le kratkoročno. Te označujemo z vektorjem D_t, pri njih pa moramo v računu upoštevati še premijo za tveganje. Tipična enačba je:

Opredelitev problema — nadaljevanje

$$dF_t = \mu(F_t, \theta)dt + \sigma(F_t, \theta)dW_t + d\left(\sum_{j=1}^{N_t} E_j\right)$$

Pri danih spremenljivkah stanja želimo vrednotiti finančna sredstva s pomočjo argumentov arbitraže in ravnotežja. Pri tem poznamo dve vrsti cen. Prva vrsta cen, ki jih navadno označimo z vektorjem S_t in jih modeliramo dinamično, so npr cene kapitala, kapitalskih indeksov in deviznih tečajev. Druge so navadno vrednosti izvedenih inštrumentov, ki nas pogosto zanimajo le kratkoročno. Te označujemo z vektorjem D_t, pri njih pa moramo v računu upoštevati še premijo za tveganje. Tipična enačba je:

$$dS_t = \mu(S_t, F_t, \theta)dt + \sigma(S_t, F_t, \theta)dW_t + d\left(\sum_{j=1}^{N_t} E_j\right)$$

Opredelitev problema — nadaljevanje

$$dF_t = \mu(F_t, \theta)dt + \sigma(F_t, \theta)dW_t + d\left(\sum_{j=1}^{N_t} E_j\right)$$

Pri danih spremenljivkah stanja želimo vrednotiti finančna sredstva s pomočjo argumentov arbitraže in ravnotežja. Pri tem poznamo dve vrsti cen. Prva vrsta cen, ki jih navadno označimo z vektorjem S_t in jih modeliramo dinamično, so npr cene kapitala, kapitalskih indeksov in deviznih tečajev. Druge so navadno vrednosti izvedenih inštrumentov, ki nas pogosto zanimajo le kratkoročno. Te označujemo z vektorjem D_t, pri njih pa moramo v računu upoštevati še premijo za tveganje. Tipična enačba je:

$$dS_t = \mu(S_t, F_t, \theta)dt + \sigma(S_t, F_t, \theta)dW_t + d\left(\sum_{j=1}^{N_t} E_j\right)$$

Zvezni ali diskretni čas

Pri vrednotenju izvedenih inštrumentov se srečamo s problemom izrojenih porazdelitev. V takih primerih lahko samo v primeru, ko poznamo dovolj parametrov izračunamo nekatera stanja iz opaženih cen. Tak primer je implicitna nestanovitnost v Black-Scholesovem modelu. V splošnem pa je lahko v takem modelu več neznanih parametrov in/ali cen kot znanih in jih ne moremo vseh določiti iz modela.

Predstavljeni modeli imajo zvezni čas v skladu s "state of the art" finančne matematike. V zgodovini pa so bili pristopi (in še vedno obstajajo), ki so dajali prednost modelom v diskretnem času, predvsem modelom, ki so osnovani na slučajnem sprehodu. Zavedati se moramo, da je limita slučajnega sprehoda, če pošljemo dolžine časovnih intervalčkov na ustrezen način proti nič, Wienerjev proces. Tako so modeli z zveznim časom (ob primerno skrbno kalibriranih prehodih) le limite modelov z diskretnim časom.

Zvezni ali diskretni čas

Pri vrednotenju izvedenih inštrumentov se srečamo s problemom izrojenih porazdelitev. V takih primerih lahko samo v primeru, ko poznamo dovolj parametrov izračunamo nekatera stanja iz opaženih cen. Tak primer je implicitna nestanovitnost v Black-Scholesovem modelu. V splošnem pa je lahko v takem modelu več neznanih parametrov in/ali cen kot znanih in jih ne moremo vseh določiti iz modela.

Predstavljeni modeli imajo zvezni čas v skladu s "state of the art" finančne matematike. V zgodovini pa so bili pristopi (in še vedno obstajajo), ki so dajali prednost modelom v diskretnem času, predvsem modelom, ki so osnovani na slučajnem sprehodu. Zavedati se moramo, da je limita slučajnega sprehoda, če pošljemo dolžine časovnih intervalčkov na ustrezen način proti nič, Wienerjev proces. Tako so modeli z zveznim časom (ob primerno skrbno kalibriranih prehodih) le limite modelov z diskretnim časom.

Iz zveznega v diskretni čas – 1

Prav tako pa je lahko problem statistično preverjanje modelov z zveznim časom. Podatke, iz katerih računamo stanja sistema in parametre, lahko dobimo in fizično uporabimo le v diskretnih časovnih točkah. Tako pridemo do obratnega vprašanja diskretizacije časa. Predstavimo odgovor na to vprašanje, ki nas naravno pripelje do funkcij verjetja za nadaljnje izračune. Tipično opazujemo nabor cen Y, kjer je $Y = (S, D)$ in so $S = (S_1, \ldots, S_T)$ ter $D = (D_1, \ldots, D_T)$. Pri tem privzamemo, da so cene opazovane v nekih diskretnih ekvidistantnih intervalih. Zaradi enostavnosti normiramo čas tako, da je dolžina intervala enaka 1. To nas pripelje do naslednjega modela, ki ima zaenkrat še zvezni čas, za cene izvedenih inštrumentov

$$D_t = D(S_t, F_t, \theta) + \varepsilon_t, \tag{1}$$

za kapitalske cene

Iz zveznega v diskretni čas – 1

Prav tako pa je lahko problem statistično preverjanje modelov z zveznim časom. Podatke, iz katerih računamo stanja sistema in parametre, lahko dobimo in fizično uporabimo le v diskretnih časovnih točkah. Tako pridemo do obratnega vprašanja diskretizacije časa. Predstavimo odgovor na to vprašanje, ki nas naravno pripelje do funkcij verjetja za nadaljnje izračune. Tipično opazujemo nabor cen Y, kjer je $Y = (S, D)$ in so $S = (S_1, \ldots, S_T)$ ter $D = (D_1, \ldots, D_T)$. Pri tem privzamemo, da so cene opazovane v nekih diskretnih ekvidistantnih intervalih. Zaradi enostavnosti normiramo čas tako, da je dolžina intervala enaka 1. To nas pripelje do naslednjega modela, ki ima zaenkrat še zvezni čas, za cene izvedenih inštrumentov

$$D_t = D(S_t, F_t, \theta) + \varepsilon_t, \tag{1}$$

za kapitalske cene

Iz zveznega v diskretni čas — 2

$$S_{t+1} = S_t + \int_t^{t+1} \mu(S_u, F_u, \theta)\, du + \int_t^{t+1} \sigma(S_u, F_u, \theta)\, dW_u + \sum_{j=1}^{N_t} E_j, \tag{2}$$

in za faktorje

$$F_{t+1} = F_t + \int_t^{t+1} \mu(F_u, \theta)\, du + \int_t^{t+1} \sigma(F_u, \theta)\, dW_u + \sum_{j=1}^{N_t} E_j. \tag{3}$$

Medtem ko govorita vsebinsko enačbi (1) in (2) o zvezah med parametri in podatki, je enačba (1) glavna evolucijska enačba sistema. Vse tri pa so dokaj zapletene.
Premislimo, kaj nas pravzaprav zanima. Časi in velikosti skokov ter druge vrednosti F_t so v ozadju dogajanj, čeprav jih navadno opazimo. Spremenljivke F_t rešijo evolucijski sistem enačb.

Iz zveznega v diskretni čas — 2

$$S_{t+1} = S_t + \int_t^{t+1} \mu(S_u, F_u, \theta)\, du + \int_t^{t+1} \sigma(S_u, F_u, \theta)\, dW_u + \sum_{j=1}^{N_t} E_j, \tag{2}$$

in za faktorje

$$F_{t+1} = F_t + \int_t^{t+1} \mu(F_u, \theta)\, du + \int_t^{t+1} \sigma(F_u, \theta)\, dW_u + \sum_{j=1}^{N_t} E_j. \tag{3}$$

Medtem ko govorita vsebinsko enačbi (1) in (2) o zvezah med parametri in podatki, je enačba (1) glavna evolucijska enačba sistema. Vse tri pa so dokaj zapletene.
Premislimo, kaj nas pravzaprav zanima. Časi in velikosti skokov ter druge vrednosti F_t so v ozadju dogajanj, čeprav jih navadno opazimo. Spremenljivke F_t rešijo evolucijski sistem enačb.

Iz zveznega v diskretni čas — 3

Ne znamo pa iz zgornjih enačb izračunati niti verjetij $p(Y|X,\theta)$ niti porazdelitev stanj $p(X|\theta)$. V ta namen moramo te enačbe še diskretizirati. Pri tem je smiselno privzeti, da se interval časovne diskretizacije ujema s časovno frekvenco opazovanih pojavov. Tako pridemo do naslednjega modela z diskretnim časom:

$$D_{t+1} = D(S_{t+1}, F_{t+1}, \theta) + \varepsilon_{t+1}, \tag{4}$$

$$S_{t+1} = S_t + \mu(S_t, F_t, \theta) + \sigma(S_t, F_t, \theta)\varepsilon_{t+1} + E_{t+1}, \tag{5}$$

$$F_{t+1} = F_t + \mu(F_t, \theta) + \sigma(F_t, \theta)\varepsilon_{t+1} + E_{t+1}. \tag{6}$$

Iz zveznega v diskretni čas – 3

Ne znamo pa iz zgornjih enačb izračunati niti verjetij $p(Y|X,\theta)$ niti porazdelitev stanj $p(X|\theta)$. V ta namen moramo te enačbe še diskretizirati. Pri tem je smiselno privzeti, da se interval časovne diskretizacije ujema s časovno frekvenco opazovanih pojavov. Tako pridemo do naslednjega modela z diskretnim časom:

$$D_{t+1} = D(S_{t+1}, F_{t+1}, \theta) + \varepsilon_{t+1}, \tag{4}$$

$$S_{t+1} = S_t + \mu(S_t, F_t, \theta) + \sigma(S_t, F_t, \theta)\varepsilon_{t+1} + E_{t+1}, \tag{5}$$

$$F_{t+1} = F_t + \mu(F_t, \theta) + \sigma(F_t, \theta)\varepsilon_{t+1} + E_{t+1}. \tag{6}$$

Iz privzetih zveznih modelov potem načeloma lahko dobimo porazdelitve tega aproksimativnega modela z diskretnim časom.

Iz zveznega v diskretni čas — 3

Ne znamo pa iz zgornjih enačb izračunati niti verjetij $p(Y|X,\theta)$ niti porazdelitev stanj $p(X|\theta)$. V ta namen moramo te enačbe še diskretizirati. Pri tem je smiselno privzeti, da se interval časovne diskretizacije ujema s časovno frekvenco opazovanih pojavov. Tako pridemo do naslednjega modela z diskretnim časom:

$$D_{t+1} = D(S_{t+1}, F_{t+1}, \theta) + \varepsilon_{t+1}, \tag{4}$$

$$S_{t+1} = S_t + \mu(S_t, F_t, \theta) + \sigma(S_t, F_t, \theta)\varepsilon_{t+1} + E_{t+1}, \tag{5}$$

$$F_{t+1} = F_t + \mu(F_t, \theta) + \sigma(F_t, \theta)\varepsilon_{t+1} + E_{t+1}. \tag{6}$$

Iz privzetih zveznih modelov potem načeloma lahko dobimo porazdelitve tega aproksimativnega modela z diskretnim časom.