Verjetnost 2
Šesto poglavje
Obratna pot do markovskih verig

Matjaž Omladič

Oktober 2010

Vsebina

Osnovne sestavine obratne poti

Imejmo markovsko verigo z diskretnim časom Y s števno množico stanj S, z začetno porazdelitvijo π^0 in prehodno matriko Q, ki ima lastnost, da so vsi njeni diagonalni elementi enaki 0, torej je $q_{ii} = 0$ za vse $i \in S$. (Spomnimo se, da je imela vpeta markovska veriga te lastnosti.)

Nadalje imejmo zaporedje n.e.p. slučajnih spremenljivk E_n, ki so neodvisne tudi od verige Y in so vse porazdeljene eksponentno s parametrom 1. Imejmo še števno množico strogo pozitivnih intenzivnosti zadrževanja $\{\lambda_i\}_{i \in S}$.

Osnovne sestavine obratne poti

Imejmo markovsko verigo z diskretnim časom Y s števno množico stanj S, z začetno porazdelitvijo π^0 in prehodno matriko Q, ki ima lastnost, da so vsi njeni diagonalni elementi enaki 0, torej je $q_{ii} = 0$ za vse $i \in S$. (Spomnimo se, da je imela vpeta markovska veriga te lastnosti.)
Nadalje imejmo zaporedje n.e.p. slučajnih spremenljivk E_n, ki so neodvisne tudi od verige Y in so vse porazdeljene eksponentno s parametrom 1. Imejmo še števno množico strogo pozitivnih intenzivnosti zadrževanja $\{\lambda_i\}_{i\in S}$.
Tvorili bomo rekurzivno zaporedje slučajnih časov $T_0 = 0$ in

$$T_{n+1} = T_n + \frac{E_n}{\lambda_{Y_n}}.$$

To pomeni, da je čas zadrževanja, prirejen n-tem koraku diskretne verige, porazdeljen eksponentno s parametrom λ_{Y_n}. Slučajna spremenljivka T_n pa potem pomeni vsoto prvih n od teh časov.

Osnovne sestavine obratne poti

Imejmo markovsko verigo z diskretnim časom Y s števno množico stanj S, z začetno porazdelitvijo π^0 in prehodno matriko Q, ki ima lastnost, da so vsi njeni diagonalni elementi enaki 0, torej je $q_{ii} = 0$ za vse $i \in S$. (Spomnimo se, da je imela vpeta markovska veriga te lastnosti.)

Nadalje imejmo zaporedje n.e.p. slučajnih spremenljivk E_n, ki so neodvisne tudi od verige Y in so vse porazdeljene eksponentno s parametrom 1. Imejmo še števno množico strogo pozitivnih intenzivnosti zadrževanja $\{\lambda_i\}_{i \in S}$.

Tvorili bomo rekurzivno zaporedje slučajnih časov $T_0 = 0$ in

$$T_{n+1} = T_n + \frac{E_n}{\lambda_{Y_n}}.$$

To pomeni, da je čas zadrževanja, prirejen n-tem koraku diskretne verige, porazdeljen eksponentno s parametrom λ_{Y_n}. Slučajna spremenljivka T_n pa potem pomeni vsoto prvih n od teh časov.

Osnovne lastnosti

Slučajni proces z zveznim časom tvorimo zdaj po predpisu

$$X(t) = Y_n \quad \text{za} \quad T_n \leqslant t < T_{n+1}.$$

Poglejmo si nekaj lastnosti tako dobljenega slučajnega procesa. Najprej ugotovimo:

- Časi zadrževanja v posameznih korakih zveznega procesa $\{T_m - T_{m-1}\}_{m \in \mathbb{N}}$ so eksponentno porazdeljeni in pogojno neodvisni pri pogoju $\{Y_n\}$.
- Proces ima markovsko lastnost.

Osnovne lastnosti

Slučajni proces z zveznim časom tvorimo zdaj po predpisu

$$X(t) = Y_n \quad \text{za} \quad T_n \leqslant t < T_{n+1}.$$

Poglejmo si nekaj lastnosti tako dobljenega slučajnega procesa. Najprej ugotovimo:

- Časi zadrževanja v posameznih korakih zveznega procesa $\{T_m - T_{m-1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ so eksponentno porazdeljeni in pogojno neodvisni pri pogoju $\{Y_n\}$.
- Proces ima markovsko lastnost.

Markovska lastnost sledi po kratkem računu, ki pokaže

$$P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n > u | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i, T_0, \ldots, T_n) =$$

$$P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n > u | X_n = i)$$

Osnovne lastnosti

Slučajni proces z zveznim časom tvorimo zdaj po predpisu

$$X(t) = Y_n \quad \text{za} \quad T_n \leqslant t < T_{n+1}.$$

Poglejmo si nekaj lastnosti tako dobljenega slučajnega procesa. Najprej ugotovimo:

- Časi zadrževanja v posameznih korakih zveznega procesa $\{T_m - T_{m-1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ so eksponentno porazdeljeni in pogojno neodvisni pri pogoju $\{Y_n\}$.
- Proces ima markovsko lastnost.

Markovska lastnost sledi po kratkem računu, ki pokaže

$$P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n > u | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i, T_0, \ldots, T_n) =$$

$$P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n > u | X_n = i)$$

Dva zgleda

Najprej rojstno smrtni proces še po obratni varianti. Vlogo vpete markovske verige igra slučajni sprehod na množici stanj $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ter prehodnimi verjetnostmi $q_{n,n+1} = p_n$, $q_{n,n-1} = 1 - p_n$ pri $n \geqslant 1$ ter $q_{01} = 1$ (tj. sprehod z eno odbijajočo steno). Intenzivnosti zadrževanja označimo z $\{\alpha_n\}_{n \in S}$. Od tod dobimo intenzivnosti rojstev $\lambda_n = p_n \alpha_n$ in intenzivnosti smrti $\mu_n = (1 - p_n)\alpha_n$.

V naslednji verigi z zveznim časom naj bodo časi zadrževanja vsi enaki λ. Tedaj so T_n časi Poissonovega toka s parametrom λ. Označimo ta proces z $N(t)$. Tedaj je $X(t) = Y_{N(t)}$. Tu lahko eksplicitno izračunamo polgrupo matrik:

Dva zgleda

Najprej rojstno smrtni proces še po obratni varianti. Vlogo vpete markovske verige igra slučajni sprehod na množici stanj $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ter prehodnimi verjetnostmi $q_{n,n+1} = p_n$, $q_{n,n-1} = 1 - p_n$ pri $n \geqslant 1$ ter $q_{01} = 1$ (tj. sprehod z eno odbijajočo steno). Intenzivnosti zadrževanja označimo z $\{\alpha_n\}_{n \in S}$. Od tod dobimo intenzivnosti rojstev $\lambda_n = p_n \alpha_n$ in intenzivnosti smrti $\mu_n = (1 - p_n)\alpha_n$.
V naslednji verigi z zveznim časom naj bodo časi zadrževanja vsi enaki λ. Tedaj so T_n časi Poissonovega toka s parametrom λ. Označimo ta proces z $N(t)$. Tedaj je $X(t) = Y_{N(t)}$. Tu lahko eksplicitno izračunamo polgrupo matrik:

$$P_{ij}(t) = P(X_{N(t)} = j | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = j | X_0 = i) P(N(t) = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} q_{ij}^{(n)}$$

Dva zgleda

Najprej rojstno smrtni proces še po obratni varianti. Vlogo vpete markovske verige igra slučajni sprehod na množici stanj $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ter prehodnimi verjetnostmi $q_{n,n+1} = p_n$, $q_{n,n-1} = 1 - p_n$ pri $n \geqslant 1$ ter $q_{01} = 1$ (tj. sprehod z eno odbijajočo steno). Intenzivnosti zadrževanja označimo z $\{\alpha_n\}_{n \in S}$. Od tod dobimo intenzivnosti rojstev $\lambda_n = p_n \alpha_n$ in intenzivnosti smrti $\mu_n = (1 - p_n)\alpha_n$.

V naslednji verigi z zveznim časom naj bodo časi zadrževanja vsi enaki λ. Tedaj so T_n časi Poissonovega toka s parametrom λ. Označimo ta proces z $N(t)$. Tedaj je $X(t) = Y_{N(t)}$. Tu lahko eksplicitno izračunamo polgrupo matrik:

$$P_{ij}(t) = P(X_{N(t)} = j | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = j | X_0 = i) P(N(t) = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} q_{ij}^{(n)}$$

Stabilnost

Za intenzivnosti zadrževanja $\{\lambda_i\}_{i\in S}$ smo privzeli, da vse ležijo na intervalu $(0, +\infty)$. Poglejmo, kaj bi bil naravni pomen obeh robnih vrednosti. Ker pomeni λ_i^{-1} povprečni čas zadrževanja, lahko robna vrednost $\lambda_i = 0$ naravno modelira *absrobirajoče stanje* $i \in S$. Opazimo, da zaradi privzetka, da so diagonalni elementi prehodne matrike Q vsi enaki 0, torej je $q_{ii} = 0$ za vse $i \in S$, absorbirajočega stanja ne moremo modelirati z diskretnim delom verige Y.

Primer $\lambda_i = +\infty$ pa modelira stanje $i \in S$, ki ga veriga obišče in v istem trenutku zapusti. Tako stanje imenujemo *trenutno stanje*. Kadar pa za intenzivnost zadrževanja velja osnovni privzetek $0 < \lambda_i < +\infty$, potem pravimo, da je stanje $i \in S$ *stabilno*.

Stabilnost

Za intenzivnosti zadrževanja $\{\lambda_i\}_{i\in S}$ smo privzeli, da vse ležijo na intervalu $(0,+\infty)$. Poglejmo, kaj bi bil naravni pomen obeh robnih vrednosti. Ker pomeni λ_i^{-1} povprečni čas zadrževanja, lahko robna vrednost $\lambda_i = 0$ naravno modelira *absrobirajoče stanje* $i \in S$. Opazimo, da zaradi privzetka, da so diagonalni elementi prehodne matrike Q vsi enaki 0, torej je $q_{ii} = 0$ za vse $i \in S$, absorbirajočega stanja ne moremo modelirati z diskretnim delom verige Y.
Primer $\lambda_i = +\infty$ pa modelira stanje $i \in S$, ki ga veriga obišče in v istem trenutku zapusti. Tako stanje imenujemo *trenutno stanje*. Kadar pa za intenzivnost zadrževanja velja osnovni privzetek $0 < \lambda_i < +\infty$, potem pravimo, da je stanje $i \in S$ *stabilno*.

Oglejmo si še, kaj se zgodi s procesom po času $T_\infty = \lim_n T_n$. Če je $T_\infty = \infty$, nam za to ni treba skrbeti. Prehodi so se lepo razvrstili skozi čas. Prejšnja definicija opredeli samo te primere.

Stabilnost

Za intenzivnosti zadrževanja $\{\lambda_i\}_{i\in S}$ smo privzeli, da vse ležijo na intervalu $(0,+\infty)$. Poglejmo, kaj bi bil naravni pomen obeh robnih vrednosti. Ker pomeni λ_i^{-1} povprečni čas zadrževanja, lahko robna vrednost $\lambda_i = 0$ naravno modelira *absrobirajoče stanje* $i \in S$. Opazimo, da zaradi privzetka, da so diagonalni elementi prehodne matrike Q vsi enaki 0, torej je $q_{ii} = 0$ za vse $i \in S$, absorbirajočega stanja ne moremo modelirati z diskretnim delom verige Y.
Primer $\lambda_i = +\infty$ pa modelira stanje $i \in S$, ki ga veriga obišče in v istem trenutku zapusti. Tako stanje imenujemo *trenutno stanje*. Kadar pa za intenzivnost zadrževanja velja osnovni privzetek $0 < \lambda_i < +\infty$, potem pravimo, da je stanje $i \in S$ *stabilno*.
Oglejmo si še, kaj se zgodi s procesom po času $T_\infty = \lim_n T_n$. Če je $T_\infty = \infty$, nam za to ni treba skrbeti. Prehodi so se lepo razvrstili skozi čas. Prejšnja definicija opredeli samo te primere.

Eksplozija

Kadar pa je $T_\infty < \infty$, se je v končnem času zgodilo neskončno prehodov. V tem primeru pravimo, da ima veriga *eksplozijo*. Točneje, pravimo, da je proces *regularen*, če velja

$$P(T_\infty = \infty | X(0) = i) \quad \text{za vse} \quad i \in S.$$

Izrek (Regularnost)

Za poljubno stanje $i \in S$ velja, da je

$$P(T_\infty < \infty | X(0) = i) = P\left(\sum_n \frac{1}{\lambda_{Y_n}} < \infty | X(0) = i\right).$$

Zato je markovska veriga regularna natanko tedaj, ko je

$$P\left(\sum_n \frac{1}{\lambda_{Y_n}} = \infty | X(0) = i\right) \quad \text{za vse} \quad i \in S.$$

Eksplozija

Kadar pa je $T_\infty < \infty$, se je v končnem času zgodilo neskončno prehodov. V tem primeru pravimo, da ima veriga *eksplozijo*. Točneje, pravimo, da je proces *regularen*, če velja

$$P(T_\infty = \infty | X(0) = i) \quad \text{za vse} \quad i \in S.$$

Izrek (Regularnost)

Za poljubno stanje $i \in S$ velja, da je

$$P(T_\infty < \infty | X(0) = i) = P\left(\sum_n \frac{1}{\lambda_{Y_n}} < \infty | X(0) = i\right).$$

Zato je markovska veriga regularna natanko tedaj, ko je

$$P\left(\sum_n \frac{1}{\lambda_{Y_n}} = \infty | X(0) = i\right) \quad \textit{za vse} \quad i \in S.$$

Eksplozija – nadaljevanje

Pojem eksplozije smo že srečali pri rojstnih procesih. Tam smo tudi dokaj natančno preverili ekvivalentnost s sorodnim pogojem, kot je pogoj iz tega izreka. Zato dokaz tokrat opustimo. Raje si poglejmo nekaj preprostih posledic:

- Če so intenzivnosti zadrževanja omejene z neko konstanto, potem je veriga regularna.
- Če so intenzivnosti zadrževanja linearne, tj $\lambda_i = \lambda i$, potem je veriga regularna.
- Če je množica stanj končna, potem je veriga regularna.

Eksplozija — nadaljevanje

Pojem eksplozije smo že srečali pri rojstnih procesih. Tam smo tudi dokaj natančno preverili ekvivalentnost s sorodnim pogojem, kot je pogoj iz tega izreka. Zato dokaz tokrat opustimo. Raje si poglejmo nekaj preprostih posledic:

- Če so intenzivnosti zadrževanja omejene z neko konstanto, potem je veriga regularna.
- Če so intenzivnosti zadrževanja linearne, tj $\lambda_i = \lambda i$, potem je veriga regularna.
- Če je množica stanj končna, potem je veriga regularna.
- Označimo z $M \subset S$ množico minljivih stanj. Če veriga nima trenutnih stanj (kar smo itak privzeli) in če je

  $$P\left(Y_n \in M, \forall n | X(0) = i\right) = 0 \quad \text{za vse} \quad i \in S,$$

  potem je veriga regularna.

Eksplozija — nadaljevanje

Pojem eksplozije smo že srečali pri rojstnih procesih. Tam smo tudi dokaj natančno preverili ekvivalentnost s sorodnim pogojem, kot je pogoj iz tega izreka. Zato dokaz tokrat opustimo. Raje si poglejmo nekaj preprostih posledic:

- Če so intenzivnosti zadrževanja omejene z neko konstanto, potem je veriga regularna.
- Če so intenzivnosti zadrževanja linearne, tj $\lambda_i = \lambda i$, potem je veriga regularna.
- Če je množica stanj končna, potem je veriga regularna.
- Označimo z $M \subset S$ množico minljivih stanj. Če veriga nima trenutnih stanj (kar smo itak privzeli) in če je

  $$P\left(Y_n \in M, \forall n | X(0) = i\right) = 0 \quad \text{za vse} \quad i \in S,$$

  potem je veriga regularna.

Prehodne verjetnosti

Zdaj bi radi tudi v obratnem pristopu prišli do prehodnih verjetnosti

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i).$$

Izrek

Za poljubni stanji $i, j \in S$ ter poljuben čas $t > 0$ velja, da je

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} \sum_{k \neq i} Q_{ik} p_{kj}(t-s)\, ds. \tag{1}$$

Prehodne verjetnosti

Zdaj bi radi tudi v obratnem pristopu prišli do prehodnih verjetnosti

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j|X(0) = i).$$

Izrek

Za poljubni stanji $i, j \in S$ ter poljuben čas $t > 0$ velja, da je

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} \sum_{k \neq i} Q_{ik} p_{kj}(t-s)\, ds. \tag{1}$$

Verjetnost $p_{ij}(t)$ razcepimo glede na vrednost prvega skoka T_1; dobimo

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j, T_1 > t|X(0) = i) + P(X(t) = j, T_1 \leqslant t|X(0) = \tag{2}$$

Prehodne verjetnosti

Zdaj bi radi tudi v obratnem pristopu prišli do prehodnih verjetnosti

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i).$$

Izrek

Za poljubni stanji $i, j \in S$ ter poljuben čas $t > 0$ velja, da je

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} \sum_{k \neq i} Q_{ik} p_{kj}(t-s)\, ds. \qquad (1)$$

Verjetnost $p_{ij}(t)$ razcepimo glede na vrednost prvega skoka T_1; dobimo

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j, T_1 > t | X(0) = i) + P(X(t) = j, T_1 \leqslant t | X(0) = \qquad (2)$$

Prehodne verjetnosti — nadaljevanje

Prva od obeh verjetnosti nas pripelje do prvega sumanda v (1). Za drugo potrebujemo podrobnejšo analizo, katere osnovne ideje tu predstavimo. Proces zapišimo formalno v obliki

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \chi_{[T_n - T_{n+1})}(t), \text{ kjer za } n \geqslant 1: \quad T_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{E_j}{\lambda(Y_j)}.$$

Če se je prvi skok zgodil v intervalu $(s, s+ds)$, se je zgodil z verjetnostjo $\lambda_i e^{-\lambda_i s}\, ds$. V trenutku skoka si je veriga izbrala stanje, v katerega bo preskočila, denimo k z verjetnostjo Q_{ik}. Po tistem nam markovska lastnost dovoli, da pozabimo na zgodovino in preidemo z verjetnostjo $p_{kj}(t-s)$ v stanje j. Dobljene verjetnosti moramo "sešteti" po vseh k in vseh s. Po tej poti pridemo iz drugega izraza v (2) do drugega izraza v (1) Ta idejno preprosti premislek lahko preverimo s tehnično zahtevnim, če ne mukotrpnim računom.

Prehodne verjetnosti — nadaljevanje

Prva od obeh verjetnosti nas pripelje do prvega sumanda v (1). Za drugo potrebujemo podrobnejšo analizo, katere osnovne ideje tu predstavimo. Proces zapišimo formalno v obliki

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \chi_{[T_n - T_{n+1})}(t), \text{ kjer za } n \geqslant 1: \quad T_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{E_j}{\lambda(Y_j)}.$$

Če se je prvi skok zgodil v intervalu $(s, s+ds)$, se je zgodil z verjetnostjo $\lambda_i e^{-\lambda_i s}\, ds$. V trenutku skoka si je veriga izbrala stanje, v katerega bo preskočila, denimo k z verjetnostjo Q_{ik}. Po tistem nam markovska lastnost dovoli, da pozabimo na zgodovino in preidemo z verjetnostjo $p_{kj}(t-s)$ v stanje j. Dobljene verjetnosti moramo "sešteti" po vseh k in vseh s. Po tej poti pridemo iz drugega izraza v (2) do drugega izraza v (1) Ta idejno preprosti premislek lahko preverimo s tehnično zahtevnim, če ne mukotrpnim računom.

Standardnost

Kot preprosto posledico tega izreka dokažemo, da je polgrupa, dobljena po obratni poti *standardna*. Obstaja torej njena desna limita v točki $t = 0$ in je enaka identični matriki.

Izrek

Prehodna matrika $P(t)$ s koeficienti $p_{ij}(t)$ je standardna.

Poučen je alternativni dokaz tega dejstva. Denimo, da je v trenutku $t = 0$ veriga v stanju i. Potem je v času $0 \leqslant t < T_1$ še zmerom v tem stanju. Ker je $T_1 \sim E_0/\lambda_i$, je

$$\lim_{t \downarrow 0} X(t) = i$$

Standardnost

Kot preprosto posledico tega izreka dokažemo, da je polgrupa, dobljena po obratni poti *standardna*. Obstaja torej njena desna limita v točki $t = 0$ in je enaka identični matriki.

Izrek

Prehodna matrika $P(t)$ s koeficienti $p_{ij}(t)$ je standardna.

Poučen je alternativni dokaz tega dejstva. Denimo, da je v trenutku $t = 0$ veriga v stanju i. Potem je v času $0 \leqslant t < T_1$ še zmerom v tem stanju. Ker je $T_1 \sim E_0/\lambda_i$, je

$$\lim_{t \downarrow 0} X(t) = i$$

skoraj gotovo pri pogoju $\{X(t) = i\}$. Skoraj gotova konvergenca pa ima za posledico konvergenco po porazdelitvi (po zakonu, po meri), zato velja

$$\lim_{t \downarrow 0} P(X(t) = j | X(t) = i) = \delta_{ij},$$

Standardnost

Kot preprosto posledico tega izreka dokažemo, da je polgrupa, dobljena po obratni poti *standardna*. Obstaja torej njena desna limita v točki $t = 0$ in je enaka identični matriki.

Izrek

Prehodna matrika $P(t)$ s koeficienti $p_{ij}(t)$ je standardna.

Poučen je alternativni dokaz tega dejstva. Denimo, da je v trenutku $t = 0$ veriga v stanju i. Potem je v času $0 \leqslant t < T_1$ še zmerom v tem stanju. Ker je $T_1 \sim E_0/\lambda_i$, je

$$\lim_{t \downarrow 0} X(t) = i$$

skoraj gotovo pri pogoju $\{X(t) = i\}$. Skoraj gotova konvergenca pa ima za posledico konvergenco po porazdelitvi (po zakonu, po meri), zato velja

$$\lim_{t \downarrow 0} P(X(t) = j | X(t) = i) = \delta_{ij},$$

Odvedljivost — 1

Druga posledica prejšnjega izreka pa je dejstvo, da je prehodna matrika tudi z desne odvedljiva v točki $t = 0$ (po komponentah). Dobljena matrika je seveda nam že dobro znani *generator*.

Izrek (Oblika generatorja)

Obstaja desni odvod matrične funkcije $P(t)$ po komponentah v vseh časovnih točkah t. V točki $t = 0$ je ta odvod enak

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(0) = g_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i, & \text{če } i = j; \\ \lambda_i Q_{ij}, & \text{če } i \neq j. \end{cases}$$

V matričnem zapisu dobi enačba iz tega izreka obliko

$$P'(0) = G.$$

Tu označuje matrika G s komponentami g_{ij} generator.

Odvedljivost — 1

Druga posledica prejšnjega izreka pa je dejstvo, da je prehodna matrika tudi z desne odvedljiva v točki $t = 0$ (po komponentah). Dobljena matrika je seveda nam že dobro znani *generator*.

Izrek (Oblika generatorja)

Obstaja desni odvod matrične funkcije $P(t)$ po komponentah v vseh časovnih točkah t. V točki $t = 0$ je ta odvod enak

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(0) = g_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i, & \text{če } i = j; \\ \lambda_i Q_{ij}, & \text{če } i \neq j. \end{cases}$$

V matričnem zapisu dobi enačba iz tega izreka obliko

$$P'(0) = G.$$

Tu označuje matrika G s komponentami g_{ij} generator.

Odvedljivost — 2

Slednja enačba ima na diagonali naslednji pomen:

$$1 - p_{ii}(t) = \lambda_i t + o(t),$$

to se pravi, da je $\lambda_i t$ ptibližno enaka verjetnosti, da bo veriga zapustila stanje i, oziroma je λ_i *pretok verjetnosti*, da bo veriga zapustila stanje i pred časom t. Oglejmo si še pomen iste enačbe izven diagonale:

$$p_{ij}(t) = \lambda_i Q_{ij} t + o(t),$$

to se pravi, da je $\lambda_i Q_{ij} t$ ptibližno enaka verjetnosti, da bo veriga zapustila stanje i in prešla v stanje j. Torej je $\lambda_i Q_{ij}$ *pretok verjetnosti*, da bo veriga prešla iz stanja i v stanje j pred časom t.

Odvedljivost — 2

Slednja enačba ima na diagonali naslednji pomen:

$$1 - p_{ii}(t) = \lambda_i t + o(t),$$

to se pravi, da je $\lambda_i t$ ptibližno enaka verjetnosti, da bo veriga zapustila stanje i, oziroma je λ_i *pretok verjetnosti*, da bo veriga zapustila stanje i pred časom t. Oglejmo si še pomen iste enačbe izven diagonale:

$$p_{ij}(t) = \lambda_i Q_{ij} t + o(t),$$

to se pravi, da je $\lambda_i Q_{ij} t$ ptibližno enaka verjetnosti, da bo veriga zapustila stanje i in prešla v stanje j. Torej je $\lambda_i Q_{ij}$ *pretok verjetnosti*, da bo veriga prešla iz stanja i v stanje j pred časom t.

Da bi dokazali izrek, vstavimo v rekurzivno integralsko enačbo za $p_{ij}(t)$ substitucijo $u = t - s$:

Odvedljivost — 2

Slednja enačba ima na diagonali naslednji pomen:

$$1 - p_{ii}(t) = \lambda_i t + o(t),$$

to se pravi, da je $\lambda_i t$ ptibližno enaka verjetnosti, da bo veriga zapustila stanje i, oziroma je λ_i *pretok verjetnosti*, da bo veriga zapustila stanje i pred časom t. Oglejmo si še pomen iste enačbe izven diagonale:

$$p_{ij}(t) = \lambda_i Q_{ij} t + o(t),$$

to se pravi, da je $\lambda_i Q_{ij} t$ ptibližno enaka verjetnosti, da bo veriga zapustila stanje i in prešla v stanje j. Torej je $\lambda_i Q_{ij}$ *pretok verjetnosti*, da bo veriga prešla iz stanja i v stanje j pred časom t.
Da bi dokazali izrek, vstavimo v rekurzivno integralsko enačbo za $p_{ij}(t)$ substitucijo $u = t - s$:

Odvedljivost — 3

$$p_{ij}(t) = e^{-\lambda_i t}\left[\delta_{ij} + \int_0^t \lambda_i e^{\lambda_i t}\sum_{k\neq i} Q_{ik}p_{kj}(u)\,du\right] \tag{3}$$

Funkcija pod integralskim znakom na desni strani enačbe (3) je očitno omejena. Ker je integral omejene funkcije kot funkcija zgornje meje zvezna, je na levi strani te enačbe zvezna funkcija. To pa velja za vse pare indeksov i in j. S tem dejstvom v roki se ponovno ozrimo na enačbo (3). Tokrat opazimo, da je na desni strani integral zvezne funkcije. Ta pa je vselej odvedljiva funkcija in njen odvod je enak integrandu v točki zgornje meje. Tako dobimo

Odvedljivost — 3

$$p_{ij}(t) = e^{-\lambda_i t}\left[\delta_{ij} + \int_0^t \lambda_i e^{\lambda_i t}\sum_{k\neq i} Q_{ik}p_{kj}(u)\,du\right] \tag{3}$$

Funkcija pod integralskim znakom na desni strani enačbe (3) je očitno omejena. Ker je integral omejene funkcije kot funkcija zgornje meje zvezna, je na levi strani te enačbe zvezna funkcija. To pa velja za vse pare indeksov i in j. S tem dejstvom v roki se ponovno ozrimo na enačbo (3). Tokrat opazimo, da je na desni strani integral zvezne funkcije. Ta pa je vselej odvedljiva funkcija in njen odvod je enak integrandu v točki zgornje meje. Tako dobimo

$$p'_{ij}(t) = -\lambda_i p_{ij}(t) + \lambda_i\left[\sum_{k\neq i} Q_{ik}p_{kj}(t)\right]. \tag{4}$$

Odvedljivost — 3

$$p_{ij}(t) = e^{-\lambda_i t}\left[\delta_{ij} + \int_0^t \lambda_i e^{\lambda_i t} \sum_{k\neq i} Q_{ik} p_{kj}(u)\, du\right] \tag{3}$$

Funkcija pod integralskim znakom na desni strani enačbe (3) je očitno omejena. Ker je integral omejene funkcije kot funkcija zgornje meje zvezna, je na levi strani te enačbe zvezna funkcija. To pa velja za vse pare indeksov i in j. S tem dejstvom v roki se ponovno ozrimo na enačbo (3). Tokrat opazimo, da je na desni strani integral zvezne funkcije. Ta pa je vselej odvedljiva funkcija in njen odvod je enak integrandu v točki zgornje meje. Tako dobimo

$$p'_{ij}(t) = -\lambda_i p_{ij}(t) + \lambda_i \left[\sum_{k\neq i} Q_{ik} p_{kj}(t)\right]. \tag{4}$$

Nazajšnje enačbe Kolmogorova

Z enačbo (4) smo končali dokaz zadnjega izreka. Upoštevamo še definicijo generatorja, da dobimo

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} \left[-\lambda_i \delta_{ik}(t) + \lambda_i Q_{ik}\right] p_{kj}(t) = \sum_{k \in S} g_{ik} p_{kj}(t). \qquad (5)$$

To pa je ravno nazajšnji sistem enačb Kolmogorova. Tako smo dokazali naslednji izrek:

Izrek (Nazajšnje enačbe Kolmogorova)

Za matrično polgrupo, prirejeno markovski verigi z zveznim časom po obratni poti velja, da je zvezna in zvezno odvedljiva. Zanjo in njen generator, podan z izrekom "Oblika generatorja", veljajo enačbe (5).

Nazajšnje enačbe Kolmogorova

Z enačbo (4) smo končali dokaz zadnjega izreka. Upoštevamo še definicijo generatorja, da dobimo

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} \left[-\lambda_i \delta_{ik}(t) + \lambda_i Q_{ik}\right] p_{kj}(t) = \sum_{k \in S} g_{ik} p_{kj}(t). \tag{5}$$

To pa je ravno nazajšnji sistem enačb Kolmogorova. Tako smo dokazali naslednji izrek:

Izrek (Nazajšnje enačbe Kolmogorova)

Za matrično polgrupo, prirejeno markovski verigi z zveznim časom po obratni poti velja, da je zvezna in zvezno odvedljiva. Zanjo in njen generator, podan z izrekom "Oblika generatorja", veljajo enačbe (5).

Do naprejšnjih enačb moramo prehoditi spet celo pot preko ustrezne rekurzivne integralske enačbe, kot smo jo dobili s pogojevanjem na začetku intervala . . .

Nazajšnje enačbe Kolmogorova

Z enačbo (4) smo končali dokaz zadnjega izreka. Upoštevamo še definicijo generatorja, da dobimo

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in S} \left[-\lambda_i \delta_{ik}(t) + \lambda_i Q_{ik}\right] p_{kj}(t) = \sum_{k\in S} g_{ik} p_{kj}(t). \qquad (5)$$

To pa je ravno nazajšnji sistem enačb Kolmogorova. Tako smo dokazali naslednji izrek:

Izrek (Nazajšnje enačbe Kolmogorova)

Za matrično polgrupo, prirejeno markovski verigi z zveznim časom po obratni poti velja, da je zvezna in zvezno odvedljiva. Zanjo in njen generator, podan z izrekom "Oblika generatorja", veljajo enačbe (5).

Do naprejšnjih enačb moramo prehoditi spet celo pot preko ustrezne rekurzivne integralske enačbe, kot smo jo dobili s pogojevanjem na začetku intervala . . .