12. Primeri velikih problemov lastnih vrednosti

Pogledali bomo nekaj primerov, kjer je potrebno v praksi numerično reševati velike probleme lastnih vrednosti. Problemi se pojavljajo na različnih področjih, kot so npr.:

- dinamična analiza mehaničnih struktur,
- analiza električnih vezij,
- kvantna kemija,
- makroekonoija,
- markovske verige,
- kontrolni sistemi,
- hidrodinamika,
- ...

12.1 Mehanične strukture

Pri mehaničnih strukturah nas ponavadi zanima, kako se obnašajo glede na vsiljeno nihanje. V primeru, ko so lastne frekvence blizu vsiljenim, lahko pride do pojava resonance in velikih poškodb.

Tako npr. modeli zgradb ne smejo imeti lastnih frekvenc v območju frekvenc, ki jih povzročajo potresi.

Če vzamemo za model utež, ki visi na vzmeti z dolžino l, potem nastopajo naslednje sile:

- sila težnost mg navzdol,
- sila vzmeti $-k(l+y)$, kjer je y odmik iz ravnovesne lege,
- sila dušenja $-c\frac{dy}{dt}$,
- zunanja sila $F(t)$.

Iz Newtonovega zakona dobimo

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k(l+y) - c\frac{dy}{dt} + F(t).$$

V ravnovesni legi pri $F(t) \equiv 0$ in $y \equiv 0$ velja $mg = kl$ in dobimo

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F(t).$$

Vrste dušenja

Imamo $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + c\dfrac{dy}{dt} + ky = F(t)$.

Prosto nihanje je, kadar ni dušenja in zunanjih sil. Ostane $m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$, rešitev je

$$y(t) = R\cos\left(\frac{k}{m}t - \phi\right).$$

Dušeno prosto nihanje je, če ni zunanjih sil. Ostane $m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0$, rešitev je

- $c^2 - 4km > 0$: *nadkritično dušeno nihanje* $(r_1, r_2 < 0)$

$$y(t) = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t}.$$

- $c^2 - 4km = 0$: *kritično dušeno nihanje*

$$y(t) = (a + bt)e^{-ct/2m}.$$

- $c^2 - 4km < 0$: *poddušeno nihanje* $\mu = \frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}$,

$$y(t) = e^{-ct/2m}(a\cos(\mu t) + b\sin(\mu t)).$$

Vsiljeno nihanje

Imamo $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + c\dfrac{dy}{dt} + ky = F(t)$. Če $F(t) \not\equiv 0$, dobimo še partikularno rešitev.

Ponavadi je $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, partikularna rešitev je

$$y_p(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}},$$

kjer je

$$\tan(\delta) = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}.$$

V posebnem primeru, ko ni dušenja, dobimo

$$y(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

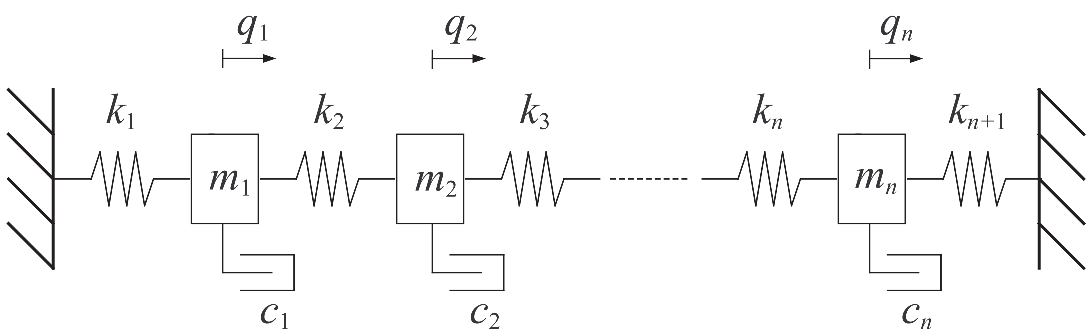
Do resonance pride, ko sistem začne nihati z vsiljeno frekvenco z zelo veliko amplitudo. Pojavi se, če ni dušenja ali pa, če je dušenje majhno in je vsiljena frekvenca blizu lastni.

Pri sistemu več mas in vzmeti dobimo

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F.$$

Sedaj moramo opazovati vse lastne frekvence.

Nihanje dušenega sistema mas in vzmeti



Če predpostavimo $q_0 = q_{n+1} = 0$, potem iz Newtonovega zakona dobimo enačbe

$$m_i \ddot{q}_i(t) = -k_i \big(q_i(t) - q_{i-1}(t)\big) - k_{i+1} \big(q_i(t) - q_{i+1}(t)\big) - c_i \dot{q}_i(t),$$

$i = 1, \ldots, n$, iz katerih sestavimo

$$M \ddot{q}(t) + C \dot{q}(t) + K q(t) = 0,$$

$$M = \mathrm{diag}(m_1, \ldots, m_n), \qquad C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n), \qquad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -k_n \\ & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}.$$

M je masna matrika, C matrika dušenja, K pa togostna matrika.

Linearizacija QEP

Dan je QEP $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$.

Standardni postopek za numerično reševanje QEP je *linearizacija*, kjer problem prevedemo na GEP reda $2n$. Možnih linearizacij je več, primer je

$$\begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -C \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix},$$

kjer je N poljubna nesingularna matrika.

$(\lambda,\, x)$ je lastni par QEP natanko tedaj, ko je $\left(\lambda, \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix}\right)$ lastni par GEP.

Če je M nesingularna, potem lahko QEP prevedemo na EP z matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}.$$

Rešitev homogene diferencialne enačbe

Če so vse lastne vrednosti QEP enostavne, ima splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0,$$

obliko

$$q(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k e^{\lambda_k t} x_k,$$

kjer so $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ konstante, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ so lastne vrednosti, $x_1, \ldots, x_{2n}$ pa lastni vektorji QEP

$$\lambda^2 Mx + \lambda Cx + Kx = 0.$$

Konstante $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ določimo iz začetnih odmikov $q(0)$ in hitrosti $\dot{q}(0)$.

d.e. je stabilna: re$(\lambda_k) < 0$ za vse k

d.e. je šibko stabilna: re$(\lambda_k) \leq 0$ za vse k, če je re$(\lambda_k) = 0$ je λ_k enostavna.

Vsiljeno nihanje

Imamo enačbo

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t).$$

Če je desna stran oblike $f(t) = e^{i\omega_0 t} f_0$, kar ustreza vsiljenemu nihanju, potem je partikularna rešitev

$$q_p(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{k=1}^{2n} \frac{y_k^H f_0}{i\omega_0 - \lambda_k} x_k,$$

kjer so $y_1, \ldots, y_{2n}$ levi lastni vektorji.

Če se $i\omega_0$ približa eni izmed lastnih vrednosti λ_k, se lahko pojavi *resonanca*.

Leta 1831 se je v Angliji podrl most blizu Manchesterja, ko so čez strumno korakali vojaki.

Znan je tudi primer Tacoma bridge iz ZDA, ki so ga porušili sunki vetra.

Millenium bridge

Most so odprli 10.6.2000 za 18.2 milijonov funtov . . .

Millenium bridge

Most so odprli 10.6.2000 za 18.2 milijonov funtov . . . in ga zaprli 12.6.2000.

Millenium bridge

Ponovno so ga odprli 22.2.2002, potem ko so za konstrukcijo in vgradnjo sistema dušilcev porabili še 5 milijonov funtov. Demo1_871.m

12.2 Električno omrežje

V enostavnem električnem krogu nastopajo naslednji elementi: vir, upornik, kondenzator in tuljava.

V zaprtem krogu je vsota padcev napetosti enaka vhodni napetosti na viru $E(t)$ (v voltih).

Za spremembo napetosti vemo:

- preko upornika je RI, kjer je R upornost (v ohmih), I pa tok (v amperih),
- preko tuljave je $L\dot{I}$, kjer je L induktivnost (v Henryjih),
- preko kondenzatorja je Q/C, kjer je C kapacitivnost (v Faradih), Q pa električni naboj, $\dot{Q} = I$.

Dobimo enačbo $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = E(t)$.

Enačba spominja na enačbo za mehanične sisteme. V primeru velikega omrežja dobimo QEP.

Sedaj je v nekaterih primerih resonanca zaželjena (radijske postaje).

Ko se v omrežju pojavijo nestabilnosti zaradi majhnih motenj, mora biti omrežje tako, da se motnje ne povečujejo. Tako kot prej mora za lastne vrednosti veljati, da nimajo pozitivnega realnega dela.

12.3 Kvantna kemija

Lastnosti elementarnih delcev (npr. elektronov) opisuje valovna funkcija $\Psi = \Psi(r,t)$, ki je rešitev Schrödingerjeve enačbe

$$\hat{H}\Psi = E\Psi,$$

kjer je $\hat{H}$ Hamiltonov operator, E pa energija delca.

$\hat{H}$ je vsota kinetične in potencialne energije, velja

$$\hat{H} = \frac{-h^2}{2m}\Delta + q = \frac{-h^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + q,$$

kjer je h Planckova konstanta, m masa delca in q potencialna energija.

$\Psi^*\Psi$ predstavlja gostoto verjetnosti, da se opazovani delec nahaja na danih koordinatah. Veljati mora $\langle \Psi, \Psi \rangle = 1$, kjer je

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f^*(r,t) g(r,t) dr.$$

Numerično to rešujemo tako, da začnemo z nastavkom $\Psi = \sum_{i=1}^N c_i \chi_i$. Dobimo GEP $Hc = ESc$, kjer je $h_{ij} = \langle \hat{H}\chi_j, \chi_i \rangle$ in $s_{ij} = \langle \chi_j, \chi_i \rangle$. Za bazne funkcije lahko npr. uporabimo FEM ali pa znane analitične rešitve.

Ko pa imamo sistem n delcev, rešitev iščemo v tenzorskem produktu, ki ima dimenzijo d^n, če delamo v d dimenzijah. Za n delcev potem potrebujemo N^n baznih funkcij.

GriebelHamaekers.pdf

12.4 Dinamični sistemi

Imamo dinamični sistem, podan z diferencialno enačbo

$$\frac{dy}{dt} = F(y),$$

kjer je $y = y(t) \in \mathbb{R}^n$ in $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Predpostavimom da nelinearna funkcija F, ki ponavadi predstavlja kak parcialni diferencialni operator, ni odvisna od t, zato je sistem časovno nespremenljiv.

Stacionarna rešitev $\overline{y}$ je limita $y(t)$ ko gre $t \longrightarrow \infty$, če ta limita obstaja. Zanjo velja, da je rešitev $F(y) = 0$.

Sistem je lokalno stabilen, če obstaja $\epsilon > 0$, da za vsako rešitev z začetnim pogojem $\|\overline{y} - y(0)\| < \epsilon$ velja $\lim_{t\to\infty} \|y(t) - \overline{y}\| = 0$.

Iz linearne aproksimacije sledi, da je sistem stabilen, če imajo vse lastne vrednosti Jacobijeve matrike $JF(\overline{y})$ v stacionarni rešitvi negativni realni del in nestabilen, če obstaja kakšna lastna vrednost s pozitivnim realnim delom. V mejnem primeru samo na podlagi linearne aproksimacije ni moč ugotoviti stabilnosti. Demo4_1637.m

12.5 Simulacija kemijskih reakcij

V literaturi pogost testni primer je t.i. Brusselator model. Gre za reakcijo dveh spojin, ki poteka v cevi z dolžino 1. Koncentraciji spojin v danem času in položaju opisujeta funkciji $x(t,r)$ in $y(t,r)$, ki zadoščata sistemu PDE:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{D_1}{L}\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + A - B - (B+1)x + x^2 y\\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{D_2}{L} + Bx - x^2 y,\end{aligned}$$

z začetnimi pogoji $x(0,r) = x_0(r), \quad y(0,r) = y_0(r), \quad 0 \le r \le 1$
in robnimi pogoji $x(t,0) = x(t,1) = A, \quad y(t,0) = y(t,1) = B/A.$

Stacionarna rešitev je $\overline{x} = A$, $\overline{y} = B/A$. Stabilnost je odvisna od lastnih vrednosti Jacobijevega operatorja

$$J = \begin{bmatrix} \frac{D_1}{L}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - Bx + 2xy & x^2 \\ B - 2xy & \frac{D_2}{L}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + -x^2 \end{bmatrix}.$$

Po diskretizaciji dobimo problem lastnih vrednosti za veliko razpršeno matriko.

Kemike zanima mejni L, ko se pojavi bifurkacija in prehod iz stabilnega v nestabilen sistem.

Demo2_Brussel.m

12.6 Makroekonomija

Denimo, da imamo ekonomski sistem, sestavljen iz n različnih sektorjev, ki proizvaja n različnih dobrin in to tako, da vsak sektor prozvaja natanko eno dobrino.

Naj bo a_{ij} količina enot dobrine i, ki jo potrebujemo za proizvodnjo ene enote dobrine j. Iz tega sestavimo $n \times n$ matriko A tehničnih koeficientov.

Če vektor $x \in \mathbb{R}^n$ predstavlja proizvodnjo (x_i je proizvedene količina dobrine i), potem je $x - Ax$ neto proizvodnja. To je t.i. Leontijev model.

Dodajmo še stroške delovne sile, ki naj bodo povsod enaki. Vsak delavec dobi za plačo d_i enot dobrine i. Če j-ti sektor zaposljuje w_j delavcev, potem skupno za proizvodnjo ene enote dobrine j potrebujemo $a_{ij} + w_j d_i$ dobrin i. Tako dobimo matriko

$$B = A + w^T d.$$

Vprašanje je, ali obstaja sistem cen p_i za dobrine, da bo celotni sistem

a) *enakomerno dobičkonosen*: vsi sektorji imajo enako razmerje dobička r,

b) *enakomerno rastoč*: sistem vsem sektorjem zagotavlja enako rast τ.

Če je B ireducibilna, potem obstajajo (Perron-Frobenius) p, x in $r = \tau$, ki zagotavljajo enakomerno rast in dobiček, za katere velja Demo5Econiea.m

$$B^T p = \frac{1}{1+r} p, \quad Bx = \frac{1}{1+\tau} x.$$

12.7 Markovske verige

Denimo, da imamo N stanj in čase $0, 1, 2, \ldots$. Prehodna matrika $P^{(k)}$ predstavlja verjetnosti, da sistem v času k preide iz enega stanja v drugo. Velja

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_k = j | X_{k-1} = i).$$

Matrika $P^{(k)}$ je *stohastična*. Elementi so nenegativni, vsota vsake vrstice je 1.

Pri Markovskih verigah nas zanima, kolikšna je verjetnost, da bo po zelo dolgem času sistem v izbranem stanju.

Če je začetna razporeditev $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \ldots, q_N^{(0)})$, potem je $q^{(k)} = q^{(k-1)} P^{(k)}$ in

$$q^{(k)} = q^{(0)} P^{(1)} \cdots P^{(k)}.$$

V primeru, ko imamo homogen sistem, je $P^{(i)} = P$ in velja $q^{(k)} = q^{(k-1)} P$.

Za stacionarna rešitev q tako velja $q = qP$, torej je q^T levi lastni vektor za P za lastno vrednost 1.

Če je P ireducibilna, potem je po Perron-Frobeniusovi teoriji 1 res dominantna lastna vrednost, lastni vektor pa ima nenegativne komponente. Če ni druge lastne vrednosti z absolutno vrednostjo 1, potem je lastni vektor q, za katerega velja $\|q\|_1 = 1$ stacionarna porazdelitev. Demo3_334.m

12.8 Kontrolni sistemi

V prostoru stanj *linearni zvezni časovno nespremenljivi kontrolni sistem* opišemo z enačbama

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{2}$$

kjer so $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *matrika stanja*, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *vhodna matrika*, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ *izhodna matrika*, $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$ *matrika direktnega prenosa*, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ *vektor stanja*, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ *vhodni signal* in $y(t) \in \mathbb{R}^r$ *izhodni signal*. Ponavadi velja $m \leq n$ in $r \leq n$. Enačbi (1) pravimo *enačba stanja*, (2) pa je *izhodna enačba*.

Iz stanja sistema x_0 v trenutku t_0 in obnašanja vhoda na časovnem intervalu (t_0, t) lahko reguliramo obnašanje izhoda za $t \geq t_0$.

Splošna rešitev je

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Homogeni sistem ($B = 0$) je

- asimptotično stabilen, če za vse lastne vrednosti velja re$(\lambda_k) < 0$;
- stabilen, če za vse lastne vrednosti velja re$(\lambda_k) \leq 0$, tiste lastne vrednosti, kjer je re$(\lambda_k) = 0$ pa so polenostavne;
- nestabilen, če obstaja lastna vrednost z re$(\lambda_k) > 0$ ali pa defektna lastna vrednost z re$(\lambda_k) = 0$. Demo6Boeing.m