Jasna Prezelj

KOMPLEKSNA DINAMIKA

Seminar za učitelje, 24.9.2011

FMF 2011

1. Kompleksna števila in Riemannova sfera

Kompleksna števila razširimo s točko ∞ in jih predstavimo kot Riemannovo sfero S. Pomagamo si s stereografsko projekcijo. Funkcije kompleksne spremenljivke, ki imajo odvod v kompleksnem smislu, se imenujejo holomorfne. Vse holomorfne preslikave, ki preslikajo Riemannovo sfero bijektivno nase, so ravno ulomljene linearne preslikave ali Möbiusove transformacije, to so preslikave oblike

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Če je $ad = bc$, je preslikava konstanta, zato te izločimo. Za poljubna dva nabora treh različnih točk obstaja MT, ki prvi nabor preslika v drugega (z danim vrstnim redom). Nabor treh točk, ki nam je na Riemannovi sferi najbolj všeč, je $0, 1, \infty$. Vse preslikave $S \to S$ so ravno racionalne funkcije. Holomorfna funkcija ima namreč lahko v točkah na ravnini in v točki ∞ le pole in ne bistvenih singularnosti. Iz zahteve, da je v ∞ kvečjemu pol, dobimo, da mora biti množica polov na S diskretna (če funkcija ni identično enaka ∞).

2. Newtonova metoda

Vsi poznamo Newtonovo ali tangentno metodo za iskanje ničel gladkih funkcij. Vemo, da dobro deluje za začetne približke, ki so dovolj blizu ničli, ki jo iščemo. Za kake druge začetne približke pa lahko divergira. Primer. Če pri funkciji $f(x) = \cos(x)$ vzamemo za začetni približek $x = 1.6$, bo zaporedje konvergiralo k $\pi/2$. Pri začetnem približku $x = 0$ pa takoj dobimo vrednost 'neskončno'.

Za polinom P nam da Newtonova metoda iteracijsko funkcijo

$$f(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}.$$

Ker je ta funkcija racionalna, ima naravno razširitev na Riemannovo sfero in jo zato gledamo kot preslikavo $S \to S$. Fiksni točki sta ravno ničli

$$f(z) = z = z - \frac{P(z)}{P'(z)}$$

$$\frac{P(z)}{P'(z)} = 0 \text{ oz. } P(z) = 0$$

in točka ∞. Odvod je

$$f'(z) = 1 - \frac{P'^2(z) - P(z)P''(z)}{P'^2(z)}$$

Takoj vidimo, da je v ničlah polinoma odvod enak 0. To pomeni, da bodo zaporedja za začetne približke, ki so dovolj blizu ničel, hitro konvergirala k ničli. (Pogledamo na spletno ucilnico IPKA, Newtonova metoda)

Definicija 2.1. *Naj bo $f : S \to S$ preslikava Riemannove sfere nase in z_0 njena fiksna točka. Če je $|f'(z_0)| < 1$, je taka točka privlačna, če je $|f'(z_0)| > 1$, je odbojna, če pa je enak 1, je nevtralna. Če je odvod enak 0, ji pravimo superprivlačna.*

Orbita točke z_0 za preslikavo f je množica $\{f^n(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, *predorbita* pa $\{f^{-n}(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Če je z_0 privlačna fiksna točka, je na neki okolici z_0 skrčitev in zato f^n na tej okolici konvergira enakomerno k z_0. *Območje privlačnosti* točke z_0, $A(z_0)$, je množica vseh točk, katerih iterati so definirani za vse $n \geq 1$ in konvergirajo k z_0.

Poglejmo si najpreprostejši primer moničnega polinoma P z ničlama a in b, $P(z) = (z-a)(z-b)$. Obravnavamo ga na Riemannovi sferi. Iteracijska funkcija f je enaka

$$f(z) = z - \frac{(z-a)(z-b)}{2z-a-b}.$$

Poleg točk a in b je tudi točka neskončno fiksna točka f. Njen tip določimo tako, da jo konjugiramo s preslikavo $\varphi(z) = z^{-1}$. Dobimo

$$g(z) = \frac{1}{f(z^{-1})} = (2z - (a+b)z^2)\sum_0^\infty (abz^2)^k,$$

in sicer odbojna, saj je $g'(0) = 2$.

Da bomo laže obravnavali konvergenco, si s pomočjo MT popravimo koordinatni sistem na Riemannovi sferi. Naj bo φ Möbiusova transformacija, ki preslika a v 0, b v ∞ in ∞ v 1 :

$$\varphi(z) = \frac{z-a}{z-b} \text{ in } \varphi^{-1}(z) = \frac{bz-a}{z-a}.$$

Kompozitum

$$f\circ\varphi^{-1}(z) = \frac{(bz-a)^2 - ab(z-1)^2}{2(bz-a)(z-1) - (a+b)(z-1)^2} = \frac{(bz^2-a)(b-a)}{(z^2-1)(b-a)} = \varphi^{-1}(z^2).$$

Preslikava je konjugirana z^2 in ima zato enako dinamiko. Točki 0 in ∞ sta superprivlačni in

$$A(\infty) = \{|z| > 1\}, \;\; A(0) = \{|z| < 1\}.$$

Enotska krožnica se s preslikavo $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ preslika sama nase.

To pomeni, da se praslika enotske krožnice s preslikavo f preslika sama nase. Izračunajmo, katera krožnica ali premica gre s φ na enotsko krožnico. Preslikava φ preslika ∞ v 1, sredino $(a+b)/2$ v -1, v i pa se preslika $\alpha = 1/2((a+b) - i(a-b))$. Ker je zveznica med α in sredino pravokotna na vektor $b-a$, ležijo vse te točke na premici, ki je simetrala zveznice med a in b.

V originalnem primeru sta ustrezni območji privlačnosti kar odprti polravnini na vsaki strani simetrale. ♢

Če izberemo polinom s tremi ali več različnimi ničlami, je stvar precej drugačna. (pogledamo na spletno ucilnico k IPKA, Newtonov fraktal).

Komentar k programu Newton Basins. Točka ∞ je v primeru $z^4 - 1$ odbojna fiksna točka. Črna območja so tista, v katerih bližini je konvergenca slaba ali je ni. To nas navede na misel, da bi množico razdelili na množico, kjer konvergenco imamo in na tisto, ki je nimamo. V resnici želimo več. V našem primeru je točka ∞ odbojna fiksna točka, torej zaporedje iteratov točke ∞ je konstantno, v okolici pa se odgajajo čudne stvari. Take točke želimo ločiti od ostalih fiksnih točk. Zato zahtevamo ne le konvergenco v dani točki, ampak konvergenco na okolici.

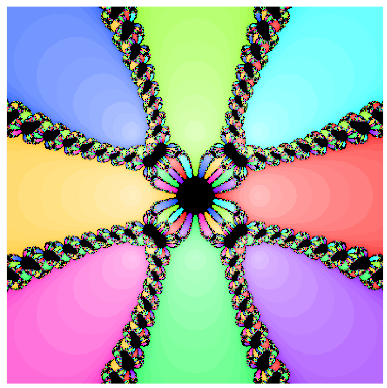
Definicija 2.2. *Naj bo $f : S \to S$ holomorfna funkcija Riemannove sfere nase. Fatoujeva množica $\mathcal{F}$ je množica vseh tistih točk $z \in S$, za katere obstaja odprta okolica $U_z \subset U$, na kateri je zaporedje iteratov f^n tako, da ima vsako njegovo zaporedje konvergentno podzaporedje.*

Opomba. Po definiciji je $\mathcal{F}$ odprta. (Temu se reče, da je družina iteratov normalna). Njen komplement $\mathcal{J}$ je Juliajeva množica. Ker je $\mathcal{F}$ odprta in S kompaktna, je $\mathcal{J}$ kompaktna.

Izrek 2.3. *Naj bo $f : S \to S$ racionalna preslikava. Fatoujeva množica vsebuje vse privlačne fiksne točke in privlačne periodične orbite. Vse odbojne fiksne točke in so vse odbojne periodične orbite so v Juliajevi množici. Predorbita $z \in \mathcal{J}$ je gosta v $\mathcal{J}$.*

Ta izrek se uporablja kot možen način za izračun $\mathcal{J}$ (inverzna iteracija). Učinkovita je za racionalne preslikave majhnih stopenj, ko število praslik ne narašča prehitro.

V primeru Newtonove metode se Juliajeva množica imenuje Newtonov fraktal. (Pogledamo na spletno ucilnico na Mathematicin zvezek in narišemo Newtonov fraktal z inverzno iteracijo. Pravzaprav samo pogledamo sliko, ker inverzna iteracija traja predolgo).



Slika 2.1: Območja privlačnosti ničel pri Newtonovi metodi za polinom z enostavnimi ničlami ± 1, $\pm i$, $\pm 1 \pm i$.

3. Polinomska iteracija

Ogledali smo si še primer funkcije $f(z) = z^2$, ki ima Juliajevo množico $|z| = 1$. Za $f(z) = z^2 - 2$ je Juliajeva množica $[-2, 2]$. Fiksni točki sta rešitvi $z^2 - z - 2 = 0$, torej $z = -1$ in $z = 2$. Ker je odvod v prvi po absolutni vrednosti enak 2, v drugi pa 4, sta obe odbojni. Za $f(z) = z^2 - 6$ je Juliajeva množica popolnoma nepovezana. (Primera z Mathematico) Druge primere si pogledamo na spletni ucilnici, IPKA, Julia.

Izrek 3.4. *Juliajeva množica polinoma P je povezana natanko tedaj, če je edina kritična točka P, ki leži v $A(\infty)$, točka ∞ ali drugače, če je orbita vsake kritične točke v $\mathbb{C}$ omejena.*

Drug ekstrem je tale.

Izrek 3.5. *Če $P^n(q) \to \infty$ za vsako kritično točko q, potem je Juliajeva množica popolnoma nepovezana.*

1. Mandelbrotova množica

Po zadnjih dveh izrekih vidimo, da imamo v primeru polinomov stopnje 2 samo dve množnosti: ali je Juliajeva množiova povezana ali pa povsem nepovezana. Postavimo polinom P v kanonično pozicijo z linearno transformacijo $h(w) = Aw + B$. Izračunajmo $h^{-1} \circ P \circ h(z)$:

$$h^{-1} \circ P \circ h(z) = \frac{1}{A} \left(aA^2 z + (2aAB + Ab)z + aB + bB + c - B \right).$$

Najpreprostejša oblika je $z^2 + C$. Če jo želimo, dobimo $a = A^{-1}$, $B = -b/(2a)$. Zato zadošča obravnavati dinamiko polinomov $P_C(z) = z^2 + C$. še nas zanima le, ali je Juliajeva množica enostavno povezana ali povsem nepovezana, zadošča ugotoviti, kam gredo iterati kritične točke polinoma, ki pa je 0. Vse tiste vrednosti C, za katere so iterati 0 omejeni, sestavljajo Mandelbrotovo množico. Lastnosti Mandelbrotove množice $\mathcal{M}$ so:

(a) $\mathcal{M}$ je zaprta enostavno povezana podmnožica $\overline{\Delta(0,2)}$, ki seka realno os na intervalu $[-2, 1/4]$;

(b) Sestavljajo jo natanko tiste točke, za katere je $|P_c^n(0)| \leq 2$ za vsak $n \geq 1$.

Ker polinomi stopnje 2 nimajo Hermanovih kolobarjev (Shikishura: H.K. je $d-2$) ali potujočih komponent in ker imajo polinomi stopnje 2 največ en privlačen ali paraboličen cikel, imamo za $c \in \mathcal{M}$ naslednje množnosti:

(a) Polinom P_c ima privlačni cikel. Če imamo privlačno točko, imamo samo eno omejeno komponento $\mathcal{F}$. Če ima cikel dolžino 2 ali več, ima $\mathcal{F}$ neskončno komponent.

(b) Polinom P_c ima parabolični cikel. Če obstaja parabolična točka z večkratnostjo 1, imamo eno omejeno komponento $\mathcal{F}$. Če je cikel dolžine 2 ali več, imamo neskončno omejenih komponent. To se zgodi le za $c = 1/4$.

(c) Polinom P_c ima cikel Sieglovih diskov. Omejenih komponent je neskončno in vsaka se sčasoma ziterira Sieglov cikel.

(d) Fatoujeva množica nima omejenih komponent. To se zgodi npr. za $c = -2, i$.

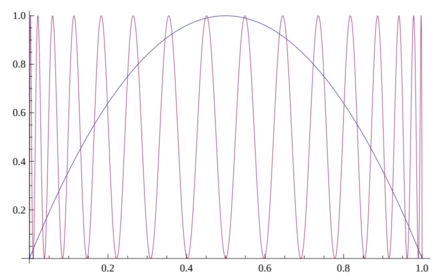
(Pogledamo na spletno ucinico, IPKA, Mandelbrot in Julia).

2. Koeficient Ljapunova

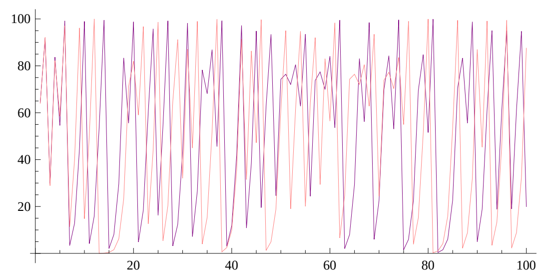
Kaj je koeficient Ljapuinova bomo razložili na primeru dinamike za logistično funkcijo $f(z) = 4z(1-z)$. Obravnavajmo najprej interval $[0,1]$. Funkcija f preslika interval $[0,1]$ surjektivno nase. Fiksni točki sta 0 in $3/4$. Odvoda v 0 in $3/4$ sta 4 in -2, torej sta točki odbojni. Po zgornji formuli bomo s preslikavo $\varphi(z) = -1/4z + 1/2$ f konjugirali v $z^2 + 6$. Za začetek si poglejmo nekaj grafov iterirank.

Majhna začetna napaka rezultira v velikih razlikah. Ujemanje na prvih petih korakih. Povečanje natančnosti za faktor 10^{15} ima za posledico ujemanje na prvih 50 korakih. Grafa razlik s ta prikazana na sliki 3.4.

Občutljivost na začetno napako meri koeficient Ljapunova. Motivacija je naslednje razmišljanje. Recimo, da je dana začetna napaka $n(0)$. Začetni



Slika 3.1: Grafa f in f_5



Slika 3.2: Kosoma linearni krivulji, ki povezujeta prvih 100 iteratov števil 0.2 in 0.201

približek je $x(0)$. Poglejmo orbiti števil $x(0)$ in $\tilde{x} = x(0) + n(0)$, označimo razliki z

$$n(k) = \tilde{x}(k) - x(k)$$

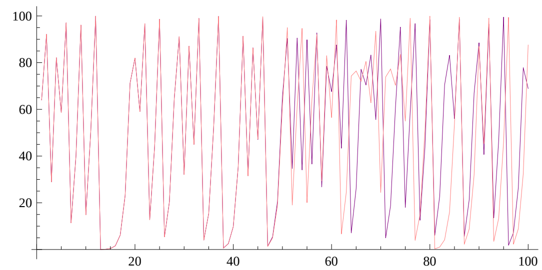
in izračunajmo faktor, za katerega se spremeni napaka po k korakih:

$$\left|\frac{n(k)}{n(0)}\right| = \left|\frac{n(k)}{n(k-1)}\right| \cdots \left|\frac{n(1)}{n(0)}\right|.$$

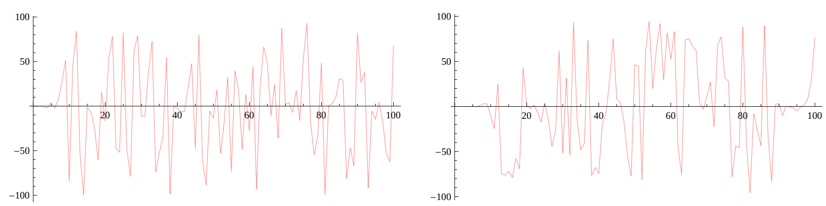
Poskusimo ga primerjati z geometrijskim zaporedjem. Pri linearni funkciji $y = cx$ za zaradi linarnost napaka vsakič pomnoži s c in kvocient je $n(k)/n(0) = c^k$. Konstanto dobimo z logaritmiranjem in limito

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \lim_{n(0) \to 0} \frac{1}{k} \log \left|\frac{n(k)}{n(0)}\right|.$$

Če je λ negativna, je $c < 1$, torej je preslikava skrčitev in napaka gre proti 0. Če je $\lambda = 0$ ne moremo zaenkrat ničesar reči, za $\lambda > 0$, pa se napaka



Slika 3.3: Kosoma linearni krivulji, ki povezujeta prvih 100 iteratov števil 0.2 in $0.2 + 10^{-16}$



(a) napaka 10^{-3}

(b) napaka 10^{-16}

Slika 3.4: Razlika v orbitah

povečuje. Iz gornje formule sledi, da je za dovolj majhne začetne približke kvocient približno enak odvodu

$$\frac{n(k)}{n(k-1)} = \frac{\tilde{x}(k) - x(k)}{\tilde{x}(k-1) - x(k-1)} = \frac{f(\tilde{x}(k-1)) - f(x(k-1))}{\tilde{x}(k-1) - x(k-1)} \doteq f'(x(k-1)).$$

Zato je

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{1}^{k} \log |f'(x(k-1))|.$$

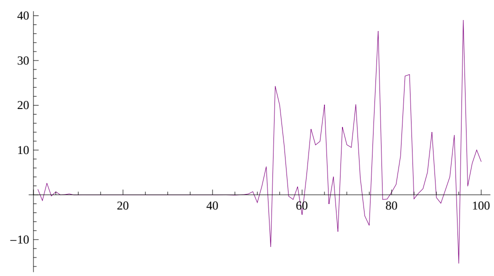
Označimo z

$$\lambda_k = \frac{1}{k} \sum_{1}^{k} \log |f'(x(k-1))|.$$

Pa poglejmo, kaj lahko izračunamo pri našem primeru.

Izberimo začetno točko $x = 0.2$. Izračunajmo

$$K_n(k) = \frac{1}{k} \log \left| \frac{n(k)}{n(0)} \right|,$$



Slika 3.5: Razlika v pri izračunu koeficienta Ljapunova

kjer K_n pomeni izračun pri začetni napaki 10^{-n}.

	30	100	1000
K_3	0.157292	0.0609407	0.00568408
K_{16}	0.660069	0.36253	0.0351383
λ_k	0.68119	0.693472	0.692494

Vidimo, da čeprav smo natančnost zelo povečali, se rezultati približno ujemajo le na prvih 30 korakih, potem pa napaka pri računu divergira (je eksponentne rasti). Graf desetkratnika napake pri izračunu koeficienta je prikazan na sliki 3.5. Fiksni točki sta 0 in 3/4. Odvoda v 0 in 3/4 sta 4 in −2, torej sta točki odbojni. To ne pomeni, da se noben iterat ne preslika v kako fiksno točko. To samo pomeni, da se v prvem koraku razdalja slike do fiksne točke poveča.