3 Polpremi produkt grup

V teoriji grup igra poleg premega (direktnega) produkta grup tud tako imenovani *polpremi produkt*. Naj bosta H in K podgrupi grupe G, ki zadoščata naslednjim pogojem

(i) K je edinka grupe G,

(ii) $K \cap H = 1$,

(iii) $\langle K, H \rangle = G$.

Tedaj rečemo, da je grupa G *notranji polpremi produkt* edinke K s podgrupo H in pišemo $G = K \rtimes H$. Naslednja trditev je očitna, vendar zelo uporabna posledica definicije notranjega polpremega produkta.

PROPOSITION 3.1 *Naj bo G notranji polpremi produkt edinke K s podgrupo H. Tedaj za vsak element $g \in G$ obstaja natanko en par elementov $k \in K$ in $h \in H$, za katera je $g = kh$. Če sta k_1h_1, k_2h_2, $k_1, k_2 \in K$, $h_1, h_2 \in H$, dva elementa grupe G, tedaj je*

$$(k_1h_1)(k_2h_2) = k_1k_2^{h_1^{-1}}\, h_1h_2.$$

Zgornja trditev nas napelje na idejo, kako za dani grupi K in H definirati grupo G, ki bo polpremi produkt podgrup, izomorfnih H in K. V spodnji definiciji bomo z $\mathrm{Aut}(K)$ označevali grupo avtomorfizmov grupe K, v kateri je operacija definirana kot obrnjeni kompozitum. Torej, za $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(K)$ in $k \in K$ je $\alpha\beta$ tisti avtomorfizem grupe K, ki poljubni $x \in K$ preslika v $\beta(\alpha(x)$. S tem v skladu bomo sliko elementa $x \in K$ z avtomorfizmom α označili z x^α (in ne $\alpha(x)$).

DEFINITION 3.2 *Naj bosta H in K poljubni grupi in naj bo $\vartheta\colon H \to Aut(K)$ poljuben homomorfizem grup. Tedaj množici $K \times H$, opremljeni s produktom*

$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) = (k_1k_2^{\vartheta(h_1)^{-1}}, h_1h_2),$$

pravimo zunanji polpremi produkt *grupe K z grupo H in jo označimo s $K \rtimes_\vartheta H$.*

EXERCISE. Bralec naj preveri, da zgoraj definirana struktura resnično zadošča aksiomom grupe. Kaj je enota v tej grupi in kako se izraža inverz danega elementa?

REMARK. V grupi $K \rtimes_\vartheta H$ brž najdemo dve podgrupi, izomorfni grupama K in H, namreč grupi $K' = \{(k, 1_H) : k \in K\}$ in $H' = \{(1_K, h) : h \in H\}$. Ni težko videti, da je grupa $K \rtimes_\vartheta H$ notranji polpremi produkt grup K' in H'. V tem smislu lahko pojma notranjega in zunanjega polpremega produkta enačimo.

LEMMA 3.3 *Naj bosta $\rho\colon K \to Sym(\Omega)$ in $\sigma\colon H \to Sym(\Omega)$ delovanji grup in naj bo $\vartheta\colon H \to Aut(K)$ homomorfizem. Tedaj je preslikava $\mu\colon K \rtimes_\vartheta H \to Sym(\Omega)$, podana s predpisom $\omega^{\mu(k,h)} = \omega^{\rho(k)\sigma(h)}$, delovanje polpremega produkta, če in samo če za vsak $\omega \in \Omega$ in vsaka $h \in H$ in $k \in K$ velja*

$$\omega^{\rho(k)\sigma(h)} = \omega^{\sigma(h)\rho(k^{\vartheta(h)})}.$$

EXAMPLE. Naj bo $\vartheta\colon H \to \mathrm{Aut}(K)$ homomorfizem grup. Ker je $\mathrm{Aut}(K) \leq \mathrm{Sym}(K)$, je ϑ hkrati tudi delovanje grupe H na množici K. Nadalje, naj bo $\rho\colon K \to \mathrm{Sym}(K)$ delovanje grupe K na sebi z desnim množenjem. Preverimo, da delovanji ρ in ϑ zadoščata pogojem leme 3.3. To bo pomenilo, da polpremi produkt $G = K \rtimes_\vartheta H$ na naraven način delouje na množici K tako, da podgrupa $K \leq G$ deluje regularno z desnim množenjem, grupa $H \leq G$ pa deluje na K s konjugacijo. Pri tem je stabilizator točke $1 \in K$ v grupi G enak grupi $H \leq G$.

Res! Vzemimo poljubne $\omega, k \in K$ in $h \in H$. Tedaj je

$$\omega^{\rho(k)\vartheta(h)} = (\omega k)^{\vartheta(h)} = \omega^{\vartheta(h)} k^{\vartheta(h)}.$$

Po drugi strani pa je

$$\omega^{\vartheta(h)\rho(k^{\vartheta(h)})} = \omega^{\vartheta(h)} k^{\vartheta(h)}.$$

Pogoj iz leme 3.3 je torej izpolnjen. Premislimo še, kaj je stabilizator elementa $1 \in K$ v grupi G. Vzemimo poljuben element $(k, h) \in G$ in izračunajmo $1^{(k,h)} = k^\vartheta(h)$. Ker he ϑ avtomorfizem grupe K, je to enako 1, če in samo če je $k = 1$. Stabilizator G_1 je zato enak grupi $\{1\} \times H \cong H \leq G$. ■

REMARK. Posebej pomemben primer situacije iz zgornjega zgleda nastopi, kadar za H vzamemo kar grupo $\mathrm{Aut}(K)$, za ϑ pa identično preslikavo. Tedaj grupo $K \rtimes_{\mathrm{id}} \mathrm{Aut}(K)$ imenujemo *holomorf grupe* K in jo označimo s simbolom $\mathrm{Hol}(K)$. Kot kaže zgornji zgled, homolomrf grupe K deluje na naraven način na množici K, in sicer tako, da grupa K deluje z regularno, grupa $\mathrm{Aut}(K)$ pa na naraven način kot grupa avtomorfizmov.

Če za K vzamemo elementarno abelovo grupo $\mathbb{Z}_p^k$ (torej aditivno grupo k-razsežnega vektorskega prostora nad obsegom $\mathbb{Z}_p$), tedaj je $\mathrm{Aut}(K)$ naravno izomorfen grupi $\mathrm{GL}(k, \mathbb{Z}_p)$ obrnljivih $k \times k$-matrik s koeficineti v $\mathbb{Z}_p$, delovanje holomorfa $\mathrm{Hol}(\mathbb{Z}_p^k)$ na $\mathbb{Z}_p^k$ pa je ekvivalentno delovanju afine grupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p^k)$ vseh afinih preslikav $x \mapsto xA + a$, $A \in GL(k, \mathbb{Z}_p)$, $a \in \mathbb{Z}_p^k$.

3.1 Spletni produkt grup

V tem razdelku bomo opisali postopek, ki danima tranzitivnima permutacijskima grupama na množicah Δ in Γ priredi neprimitivno permutacijsko grupo, ki deluje na kartezičnemu produktu $\Delta \times \Gamma$. Dobljeno grupo bomo imenovali *spletni produkt* danih grup. Konstrukcija temelji na pojmu polpremega produkta, ki smo ga predstavili v prejšnjem razdelku.

Naj grupa H deluje na množici Γ (brez škode za splošnost si lahko mislimo, da je $\Gamma = \{1, 2, \ldots, m\}$) in naj bo K poljubna grupa. Tedaj lahko na množico K^Γ s pomočjo produkta po komponentah nadanemo strukturo grupe, ki je izomorfna direktnemu produktu $|\Gamma|$ kopij grupe K. V primeru, ko je $\Gamma = \{1, \ldots, m\}$, lahko izomorfizem podamo s preslikavo, ki poljubno $f \in K^\Gamma$ preslika v m-terico $(f(1), f(2), \ldots, f(m)) \in K^m$. Nadalje, delovanje grupe H na Γ lahko s predpisom

$$f^h(\gamma) = f(\gamma^{h^{-1}}), \quad \text{za vsaka } h \in H \text{ in } \gamma \in \Gamma,$$

razširimo do delovanja na množici K^Γ. Hitro se prepričamo, da je pripadajoča preslikava $\vartheta_h \colon f \mapsto f^h$ za vsak $h \in H$ ne le permutacija množice K^Γ temveč tudi avtomorfizem grupe K^Γ, preslikava $\vartheta \colon h \to \vartheta_h$ pa homomorfizem iz grupe H v grupo K^Γ.

To nam omogoča, da zgradimo grupo $K^\Gamma \rtimes_\vartheta H$, ki jo označimo s $K \mathrm{wr}_\Gamma H$ in imenujemo *spletni produkt* grupe K z grupo H.

Denimo sedaj, da grupa K deluje na množici Δ, grupa H pa na množici Γ. Tedaj grupi H in K^Γ naravno delujeta tudi na množici $\Delta \times \Gamma$ z naslednjima predpisoma:

$$(\delta, \gamma)^h = (\delta, \gamma^h) \text{ in } (\delta, \gamma)^f = (\delta^{f(\gamma)}, \gamma) \text{ za } h \in H \text{ in } f \in K^\Gamma.$$

S pomočjo leme 3.3 se brž prepričamo, da tako podani delovanji porodita delovanje spletnega produkta $K \mathrm{wr}_\Gamma H$ na množici (δ, γ), danega s predpisom

$$(\delta, \gamma)^{(f,h)} = (\delta^{f(\gamma)}, \gamma^h).$$

Ni se težko prepričati v naslednjo trditev.

PROPOSITION 3.4 *Če grupi H in K delujeta tranzitivno in zvesto na množicah Γ in Δ, tedaj spletni produkt $K \mathrm{wr}_\Gamma H$ deluje zvesto in tranzitivno na množici $\Delta \times \Gamma$. Če vsaka od množic Γ in Δ premore vsaj dva elementa, je to delovanje neprimitivno z bloki neprimitivnosti oblike $\Delta \times \{\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$.*

Kot bomo videli v naslednjem razdelku ima zgornja trditev delni obrat.

Razdelek končajmo z naslednjim strukturnim izrekom za neprimitivne permutacijske grupe.

THEOREM 3.5 *Naj bo G neprimitivna tranzitivna permutacijska grupa na množici Ω z blokom neprimitivnosti Δ. Označimo $K = G_\Delta^\Delta$, $H = G^{\mathcal{P}_\Delta}$ in $\Gamma = \mathcal{P}_\Delta$. Tedaj obstaja bijekcija $\varphi \colon \Omega \to \Delta \times \Gamma$, ki za vsak $g \in G$ blok Δ^g preslika v množico $\Delta \times \{\Delta^g\}$, tranzitivna podgrupa $\tilde{G} \leq K \mathrm{wr}_\Gamma H$ in izomorfizem grup $\iota \colon G \to \tilde{G}$, za katere je (ι, φ) izomorfizem delovanj grupe G na Ω in grupe $\tilde{G}$ na $\Delta \times \Gamma$.*

3.2 Permutacijske grupe z regularno edinko

Naj bo K edinka permutacijske grupe G na množici Ω. Predpostavimo, da K deluje regularno na Ω (tj. K je tranzitivna, stabilizator K_ω pa je trivialna grupa). Tedaj nam Frattinijev argument zagotavlja, da je $G = KG_\omega$ (za vsak $\omega \in \Omega$). Zaradi regularnosti grupe K je presek $K \cap G_\omega$ trivialen. To pa pomeni, da je $G = K \rtimes G_\omega$. Zato, kot smo ugotovili v razdelku 3, grupa G deluje na naraven način tudi na množici K, in to tako, da K deluje regularno z desnim množenjem, grupa G_ω pa s konjugacijo. Naslednja trditev zagotavlja, da je to delovanje ekvivalentno originalnemu delovanju grupe G na Ω.

PROPOSITION 3.6 *Naj bo regularna K edinka permutacijske grupe $G \leq Sym(\Omega)$ in $\omega \in \Omega$. Tedaj je $G = K \rtimes G_\omega$, delovanje grupe G na Ω pa je izomorfno naravnemu delovanju polpremega produkta $K \rtimes G_\omega$ na množici K.*

PROOF. Definirajmo preslikavo $\varphi \colon K \to \Omega$, $k \mapsto \omega^k$ in izomorfizem grup $f : K \rtimes G_\omega \to G$, $(k, h) \mapsto kh$. Bralec naj se prepriča, da je tedaj par (f, φ) iskani izomorfizem delovanj grup $K \rtimes G_\omega$ in G na K in Ω. ■

COROLLARY 3.7 *Če tranzitivna permutacijska grupa $G \leq Sym(\Omega)$ premore regularno podgrupo K, tedaj je centralizator $Z_{G_\omega}(K) = \{g \in G_\omega : gk = kg \text{ za vsak } k \in K\}$ trivialen.*

PROOF. Res, saj vsak element grupe $Z_{G_\omega}(K)$ deluje s kojugacijo na množici K trivialno, in zato tudi trivialno na množici Ω. Rezultat sledi, saj je delovanje grupe G na Ω zvesto. ■

THEOREM 3.8 *Naj bo* $G \leq Sym(\Omega)$ *tranzitivna permutacijska grupa, ki premore regularno edinko* K.

(i) *Če* G *deluje primitivno, je* K *minimalna edinka grupe* G, *in zato ne premore nobene prave netrivialne karakteristične podgrupe.*

(ii) *Če je* G 2*-tranzitivna, je grupa* K *izomorfna elementarno abelovi grupi* $\mathbb{Z}_p^k$ *za kako praštevilo* p *in naravno število* k.

(iii) *Če je* G 3*-tranzitivna, je bodisi* $K \cong \mathbb{Z}_3$ *in* $G \cong S_3$ *bodisi je grupa* K *izomorfna elementarno abelovi grupi* $\mathbb{Z}_2^k$ *za kako naravno število* k.

(iv) *Če je* G 4*-tranzitivna, je* $K \cong \mathbb{Z}_2^2$ *in* $G \cong S_4$.

(v) *Grupa* G *ni* 5*-tranzitivna.*