# 2 Primitivnost in neprimitivnost

Skozi ves razdelek bomo predpostavljali, da grupa $G$ deluje tranzitivno na množici $\Omega$. Zanimale nas bodo particije množice $\Omega$, ki jih delovanje grupe $G$ ohranja. Takšni particiji rečemo *sistem blokov* delovanja grupe $G$.

## 2.1 Bloki neprimitivnosti

Naj grupa $G$ deluje tranzitivno na množici $\Omega$. Za poljuben element $g \in G$ in podmnožico $\Delta \subseteq \Omega$ definirajmo

$$\Delta^g = \{\omega^g : \omega \in \Delta\}.$$

S tem predpisom smo delovanje grupe $G$ na $\Omega$ na naraven način razširili do delovanja na potenčni množici $2^\Omega$. Stabilizator množice $\Delta$ bomo kot običajno označevali z

$$G_\Delta = \{g \in G : \Delta^g = \Delta\}.$$

REMARK. Poleg stabilizatorja $G_\Delta$ pa lahko definiramo tudi *točkovni stabilizator* $G_{(\Delta)}$, ki je definiran kot

$$G_{(\Delta)} = \{g \in G : \omega^g = \omega \text{ za vsak } \omega \in \Delta\}.$$

Opazimo, da je $G_{(\Delta)}$ enak jedru delovanja $G_\Delta$ na $\Delta$ in je zato podgrupa edinka v grup $G_\Delta$.

Neprazni podmnožici $\Delta \subseteq \Omega$ rečemo *blok delovanja*, če za poljuben $g \in G$ velja bodisi $\Delta^g = \Delta$ bodisi $\Delta^g \cap \Delta = \emptyset$. Množica $\Omega$ in vsake njene enoelementne podmnožice so očitno bloki vsakega delovanja na množici $\Omega$, zato jim rečemo tudi *trivialni bloki*. Blokom, ki niso trivialni, rečemo *bloki neprimitivnosti*

DEFINITION 2.1 *Tranzitivno delovanje grupe je* primitivno, *če je vsak blok delovanja trivialen. Tranzitivno delovanje, ki ni primitivno, je* neprimitivno.

Za particijo $\mathcal{P}$ množice $\Omega$ pravimo, da je $G$*-invariantna*, če za vsak $B \in \mathcal{P}$ in vsak $g \in G$ velja $B^g \in \mathcal{P}$. Hitro se prepričamo, da je vsak element $G$-invariantne particije blok delovanja grupe $G$. Obratno, če je $\Delta$ blok delovanja grupe $G$ na množici $\Omega$, tedaj je množica

$$\mathcal{P}_\Delta = \{\Delta^g : g \in G\}$$

$G$-invariantna particija množice $\Omega$. Če $G$-invarianta particija vsebuje netrivialne bloke, ji rečemo *sistem neprimitivnosti*.

## 2.2 Orbite edinke

Pomemben vir blokov neprimitivnosti predstavljajo orbite podgrup edink.

PROPOSITION 2.2 *Naj grupa $G$ deluje tranzitivno na množici $\Omega$ in naj bo $N$ njena edinka. Tedaj orbite grupe $N$ na $\Omega$ tvorijo $G$-invariantno particijo množice $\Omega$.*

PROOF. Naj bo $\omega^N$, $\omega \in \Omega$, poljubna orbita podgrupe $N$ in naj bo $g$ poljuben element grupe $G$. Tedaj je

$$(\omega^N)^g = \omega^{Ng} = \omega^{gN} = (\omega^g)^N,$$

kar je zopet orbita grupe $N$ na $\Omega$. Trditev je s tem dokazana. ■

Od tod sledi naslednje pomembno dejstvo o primitivnih permutacijskih grupah.

COROLLARY 2.3 *Vsaka netrivialna podgrupa edinka primitivne permutacijske grupe $G$ na množici $\Omega$ deluje tranzitivno na $\Omega$.*

## 2.3 Karakterizacija primitivnih delovanj s stabilizatorjem

PROPOSITION 2.4 *Tranzitivno delovanje grupe $G$ na množici $\Omega$ je primitivno, če in samo če je stabilizator $G_\omega$ (poljubne, in zato vsake) točke $\omega \in \Omega$ maksimalna podgrupa grupe $G$.*

PROOF. Denimo najprej, da delovanje grupe $G$ na $\Omega$ premore netrivialni blok $\Delta \subseteq \Omega$. Tedaj stabilizator $G_\Delta$ množice $\Delta$ vsebuje $G_\omega$, ni enak $G_\omega$ (saj deluje na $\Delta$ tranzitivno, $G_\omega$ pa ne), in ni enak $G$, saj ni tranzitiven na $\Omega$. Od tod sledi, da stabilizator $G_\omega$ ni maksimalna podgrupa grupe $G$.

Denimo sedaj, da $G_\omega$ ni maksimalna podgrupa grupe $G$. Tedaj obstaja prava podgrupa $H$ grupe $G$, v kateri je $G_\omega$ prava podgrupa. Dokazali bomo, da je orbita $\omega^H$ grupe $H$ blok neprimitivnosti delovanja grupe $G$. Dokažimo najprej, da je $\omega^H$ blok delovanja grupe $G$. Res. Če je za nek $g \in G$ velja $(\omega^H)^g \cap \omega^H \neq \emptyset$, tedaj obstaja elementa $h_1, h_2 \in H$, za katera je $\omega^{h_1 g} = \omega^{h_2}$, in zato $h_1 g h_2^{-1} \in G_\omega$. Ker je $G_\omega$ vsebovan v $H$, od tod sledi, da je $g \in h_1^{-1} H h_2 = H$, in zato $(\omega^H)^g = \omega^H$.

Dokažimo še, da je $H$ netrivialni blok. Ker grupa $H$ vsebuje vsaj en element, ki točke $\omega$ ne pribije, premore množica $\omega^H$ vsaj dva elementa. Po drugi strani, če je $\omega^H = \Omega$, tedaj je grupa $H$ tranzitivna, in po Frattinijevem argumentu **??** sledi, da je $G = G_\omega H = H$, kar je v protislovju s predpostavkami. Blok $\omega^H$ torej ni trivialen, in zato grupa $G$ ne deluje primitivno na $\Omega$. ■

## 2.4 Struktura neprimitivne permutacijske grupe

Strukturo neprimitivne permutacijske grupe $G$ z blokom neprimitivnosti $\Delta$ lahko proučujemo s pomočjo dveh prirejenih permutacijskih grup, ki ju bomo sedaj opisali.

Prva prirejena permutacijska grupa deluje na $G$-invariantni particiji $\mathcal{P}_\Delta$ in je inducirana z naravnim delovanje grupe $G$ na $\mathcal{P}_\Delta$, ki blok $B \in \mathcal{P}_\Delta$ preslika v $B^g = \{\omega^g : \omega \in B\}$. To permutacijsko grupo bomo označili z $G^{\mathcal{P}_\Delta}$.

Druga permutacijska grupa, ki jo lahko priredimo grupi $G$, pa deluje na bloku $\Delta$ in je inducirana z delovanjem stabilizatorja $G_\Delta = \{g \in G : \Delta^g = \Delta\}$ na množici $\Delta$. Hiter premislek pokaže, da je to delovanje tranzitivno (glej vaje spodaj), zato je inducirana permutacijska grupa tranzitivni gradnik delovanja grupe $G_\Delta$ na $\Omega$, in jo zato označimo s simbolom $G_\Delta^\Delta$.

Tako definirani permutacijski grupi sta v splošnem spet neprimitivni, razen v nekaterih posebnih primerih, ki si jih bomo sedaj ogledali. Blok neprimitivnosti delovanj grupe je *maksimalen*, če ni vsebovan v nobenem drugem bloku neprimitivnosti, in je *minimalen*, če ne vsebuje nobenega drugega bloka neprimitivnosti. Sistemu neprimitivnosti rečemo *najfinejši*, če ga sestavljajo minimalni bloki neprimitivnosti, in *najgrobejši*, če ga sestavljajo maksimalni bloki neprimitivnosti.

PROPOSITION 2.5 *Naj bo $\Delta$ minimalni blok neprimitivnosti in $\mathcal{P}$ najgrobejši sistem neprimtivnosti delovanja grupe $G$ na $\Omega$. Tedaj sta $G_\Delta^\Delta$ in $G^{\mathcal{P}}$ primitivni permutacijski grupi.*

Osnovno vprašanje tega razdelka je, v kolikšni meri permutacijski grupi $G^{\mathcal{P}_\Delta}$ in $G_\Delta^\Delta$ določata strukturo permutacijske grupe $G$. Oglejmo si najprej zgled, ki pokaže, da ne popolnoma.

EXAMPLE. Naj bodo $\rho$, $\tau$ in $\sigma$ permutacije na množici $\mathbb{Z}_6$ s cikličnim zapisom

$$\rho = (0,1,2)(3,4,5),\ \tau = (0,3),\ \sigma = (0,3)(1,4)(2,5)$$

in naj bosta $G$ in $H$ permutacijski grupi, generirani z $\rho$ in $\tau$ ter $\rho$ in $\sigma$:

$$G = \langle \rho, \tau \rangle, \quad H = \langle \rho, \sigma \rangle.$$

Dokažimo, da sta obe grupi tranzitivni in neprimitivni z blokom neprimitivnosti $\Delta = \{0,3\}$ ter pripadajočim sistemom neprimitivnosti $\mathcal{P}_\Delta = \{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\}$.

Nadalje, dokažimo, da je $G_\Delta^\Delta = H_\Delta^\Delta$ in $G^{\mathcal{P}_\Delta} = H^{\mathcal{P}_\Delta}$. Grupi $G$ in $H$ sta torej različni neprimitivni permutacijski grupi z istim blokom neprimitivnosti $\Delta$ in enakima prirejenima permutacijskima grupama $G_\Delta^\Delta$ in $G^{\mathcal{P}_\Delta}$.

Res. Ker obe grupi vsebujeta permutacijo $\rho$, orbiti $0^G$ in $0^H$ vsebujeta podmnožico $\{0, 0^\rho, 0^{\rho^2}\} = \{0, 1, 2\}$. Zaradi permutacij $\tau$ in $\sigma$, pa vsebuejta tudi točko $0^\tau = 0^\sigma = 4$, in ponovno zaradi permutacije $\rho$, tudi točke 5 in 6. Torej $0^G = 0^H = \mathbb{Z}_6$, kar pomeni, da sta grupo $G$ in $H$ tranzitivni.

Da dokažemo, da je $\Delta$ blok neprimitivnosti za grupi $G$ in $H$, zadošca dokazati, da generirajoče permutacije $\rho$, $\sigma$ in $\tau$ ohranjajo particijo $\mathcal{P} = \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\}$. Tedaj bo namreč tudi vsak produkt le-teh (torej vsak element grup $G$ in $H$) ohranjal particijo $\mathcal{P}$. Invariantnost particije $\mathcal{P}$ za permutacije $\rho$, $\sigma$ in $\tau$ preverimo z neposrednim računom. Pri tem opazimo, da so inducirane permutacije $\rho^{\mathcal{P}}$, $\tau^P$ in $\sigma^P$ enake

$$\rho^{\mathcal{P}} = (03, 14, 25),\ \ \sigma^{\mathcal{P}} = \tau^{\mathcal{P}} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}},$$

pri čemer smo zaradi enostavnosti blok $\{x, y\}$ označili s simbolom $xy$. Od tod sledi:

$$G^{\mathcal{P}} = \langle \rho^{\mathcal{P}}, \tau^{\mathcal{P}} \rangle = \langle (03, 14, 25) \rangle, \quad H^{\mathcal{P}} = \langle \rho^{\mathcal{P}}, \tau^{\mathcal{P}} \rangle = \langle (03, 14, 25) \rangle.$$

S tem smo dokazali, da sta permutacijski grupi $G^{\mathcal{P}}$ in $H^{\mathcal{P}}$ enaki in permutacijsko izomorfni ciklični grupi $C_3$.

Stabilizatorja $G_\Delta$ in $H_\Delta$ delujeta na dvoelementni množici $\Delta$ tranzitivno. Ker na dvoelementni množici obstaja le ena tranzitivna permutacijska grupa (namreč kar polna simetrična grupa $\mathrm{Sym}(\Delta) \cong S_2$), sta tudi permutacijski grupi $G_\Delta^\Delta$ in $H_\Delta^\Delta$ enaki (in izomorfni simetrični grupi $S_2$). ■

## 2.5 Večkratna tranzitivnost

Za množico $\Omega$ in naravno število $k \leq |\Omega|$ naj bo

$$\begin{aligned} \Omega^{\{k\}} &= \{\Delta \subseteq \Omega : |\Delta| = k\}, \\ \Omega^{(k)} &= \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) : \{\omega_1, \ldots, \omega_k\} \in \Omega^{\{k\}}\}. \end{aligned}$$

Če grupa $G$ deluje na $\Omega$, potem na naraven način deluje tudi na množicah $\Omega^{\{k\}}$ in $\Omega^{(k)}$ s predpisoma

$$\{\omega_1, \ldots, \omega_k\}^g = \{\omega_1^g, \ldots, \omega_k^g\} \ \text{ in } \ (\omega_1, \ldots, \omega_k)^g = (\omega_1^g, \ldots, \omega_k^g).$$

DEFINITION 2.6 *Naj bo $k \leq |\Omega|$ poljubna naravno število. Tedaj pravimo, da je delovanje grupe $G$ na množici $\Omega$* $k$-tranzitivno, *če grupa $G$ deluje tranzitivno na množici $\Omega^{(k)}$, in da je* $k$-homogeno, *če deluje tranzitivno na množici $\Omega^{\{k\}}$.*

PROPOSITION 2.7 *Naj grupa $G$ deluje tranzitivno na množici $\Omega$. Tedaj grupa $G$ deluje $k$-tranzitivno, če in samo če stabilizator $G_\omega$ kake (in zato vsake) točke $\omega \in \Omega$ deluje $(k-1)$-tranzitivno na množici $\Omega \setminus \{\omega\}$.*

PROPOSITION 2.8 *Vsako 2-tranzitivno delovanje je primitivno.*