Teorija zlepkov

NALOGE

Naloge so sestavljene iz teoretičnega in iz praktičnega dela. Skupno je treba rešiti 8 nalog, od tega 4 teoretične in 4 praktične naloge.

TEORETIČNE NALOGE:

1. (a) Dokažite, da so B-zlepki stopnje k nad zaporedjem vozlov $\boldsymbol{t} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k+1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{k+1})$ enaki Bernsteinovim baznim polinomom

$$b_{i,k}(x) = \binom{k}{i} x^i (1-x)^{k-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

   (b) Naj bo $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i=1}^{m+k+1}$ zaporedje vozlov, pri katerem velja

$$t_{r-k} = t_{r-k+1} = \cdots = t_r < t_{r+1} = t_{r+2} = \cdots = t_{r+s},$$

   in naj bo $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i B_{i,k} \in \mathbb{S}_{k,\boldsymbol{t}}$. Dokažite, da je

$$f^{(j)}(t_r) = \frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{(\Delta t_r)^j} \Delta^j \alpha_{r-k}, \quad j = 0, 1, \ldots, s, \quad s \le k,$$

   pri čemer je Δ prema diferenca.

2. Naj bo $\mathbb{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ prostor zlepkov stopnje k nad zaporedjem vozlov $\boldsymbol{t} = (t_i)_i$ in naj bo $f = \sum_i \alpha_i B_{i,k} \in \mathbb{S}_{k,\boldsymbol{t}}$. S pomočjo formul za računanje odvodov zlepkov izpeljite koeficiente $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)_i$, da bo

$$\int f(x)\, dx = \sum_i \beta_i B_{i,k+1}(x).$$

   Kako bi izračunali določen integral $\int_{t_{k+1}}^{s} f(x)\, dx$ za $t_{k+1} \le s \le t_{m+1}$, če je $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i=1}^{m+k+1}$.

3. Naj bo $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i=1}^{m+k+1}$, $a = t_1 = \cdots = t_{k+1}$, $t_{m+1} = \cdots = t_{m+k+1} = b$ poljubno zaporedje vozlov. Dalje naj bo $\mu_i : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ linearen funkcional definiran s predpisom

$$\mu_i g := \sum_{i=1}^{k+1} \beta_{i,j}\, g(\tau_{i,j}), \quad \tau_{i,j} \in [t_{i+1}, t_{i+k}], \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

in $Ag := \sum_{i=1}^{m} \mu_i g \, B_{i,k}$. Za splošen k dokažite sledeče: če je $Ap = p$ za vse $p \in \mathbb{P}_0$, potem mora veljati $\sum_{i=1}^{k+1} \beta_{i,j} = 1$.

Naj bo sedaj $k = 2$ in

$$\mu_i g := C_0 g(t_{i+1}) + C_1 g(t_{i+\frac{3}{2}}) + C_2 g(t_{i+2}), \quad t_{i+\frac{3}{2}} = \frac{t_{i+1} + t_{i+2}}{2}.$$

(a) Izpeljite koeficiente C_0, C_1, C_2 tako, da bo $Ap = p$ za vse $p \in \mathbb{P}_2$.

(b) Dokažite, da velja $\mu_i B_{j,2} = \delta_{i,j}$.

(c) Izpeljite oceno

$$\|Ag - g\| \le 4 \operatorname{dist}\left(g, \mathbb{S}_{2,\boldsymbol{t}}\right).$$

4. Karlinov izrek pravi, da je kolokacijska matrika $A = \left(B_{j,k}(\tau_i)\right)_{i,j}$, ki pripada korektnemu interpolacijskemu problemu, totalno pozitivna.

   (a) Dokažite, da je njen inverz $A^{-1} = (c_{i,j})_{i,j}$ v obliki 'šahovnice', to je

   $$(-1)^{i+j} c_{i,j} \ge 0$$

   za vse i, j.

   (b) Dokažite, da je tridiagonalna matrika, ki ima po diagonali štirice, pod in nad diagonalo pa enice, totalno pozitivna.

5. Naj bo $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^{n}$ ekvidistantno zaporedje stičnih točk na intervalu $[a, b]$ s korakom h in

   $$\boldsymbol{t} = (a, a, a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b, b, b)$$

   zaporedje vozlov. Naj I_2^* označuje interpolacijski operator pri izbiri interpolacijskih točk $\tau_i = t_{i,2}^*$. Dokažite, da je $\|I_2^*\| \le 2$ in $\|I_2^* g - g\| \le 3 \operatorname{dist}(g, \mathbb{S}_{2,\boldsymbol{t}})$.

6. Opišite algoritem za odstranjevanje vozlov. Pomagajte si s knjigo *L. Piegl, W. Tiller: The NURBS book, Springer,* 1997.

7. Opišite OSLO algoritem za vrivanje vozlov, predstavljen v članku *E. Cohen, T. Lyche, R. Reisenfeld: Discrete B-Splines and Subdivision Techniques in Computer Aided Geometric Design and Computer Graphics, Computer Graphics and Image Processing,* 14(2), 1980, 87-111 .

8. Opišite konstrukcijo THB-zlepkov. Glejte članek *C. Giannelli, B. Juettler, H. Speleers: THB-splines: The truncated basis for hierarchical splines, Computer Aided Geometric Design,* 29(7), 2012, 485-498.

PRAKTIČNE NALOGE:
Naloge rešite v Matlabu ali Mathematici.

1. Sprogramirajte sledeče funkcije.

   (a) Funkcijo, ki za dano zaporedje stičnih točk $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$, dano stopnjo k ter dane pogoje gladkosti v stičnih točkah $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)_{i=0}^n$, $\nu_0 = \nu_n = 0$, izračuna zaporedje vozlov $\boldsymbol{t}$ ter določi dimenzijo $m = \dim \mathbb{S}_{k,\boldsymbol{t}}$.

   (b) Funkcijo, ki izračuna vrednost B-zlepka $B_{i,k} \in \mathbb{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ v dani točki x.

   (c) Funkcijo, ki izračuna vrednost zlepka $f \in \mathbb{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ s koeficienti $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^m$ v dani točki x.

   Njihovo delovanje preizkusite na zaporedju stičnih točk

   $$\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^8 = (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 8.5, 10)$$

   in izbirah

   $$\begin{array}{llll} a) & k = 1, & \boldsymbol{\nu} = (0,1,1,1,1,1,1,1,0), & \boldsymbol{\nu} = (0,1,1,0,0,1,0,1,0), \\ b) & k = 2, & \boldsymbol{\nu} = (0,2,2,2,2,2,2,2,0), & \boldsymbol{\nu} = (0,2,1,0,1,2,1,0,0), \\ c) & k = 3, & \boldsymbol{\nu} = (0,3,3,3,3,3,3,3,0), & \boldsymbol{\nu} = (0,3,3,2,1,3,3,2,0). \end{array}$$

   Narišite vse bazne B-zlepke. Pri vsakem primeru si izberite koeficiente $\boldsymbol{\alpha}$ ter narišite graf zlepka z izbranimi koeficienti.

2. Naj bo $f \in \mathbb{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ in naj bo $\boldsymbol{t}^{(\ell)}$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, zaporedje zaporedja vozlov, ki je definirano rekurzivno iz $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}^{(0)}$ na sledeč način. Zaporedje vozlov $\boldsymbol{t}^{(\ell)}$ dobimo iz $\boldsymbol{t}^{(\ell-1)}$ tako, da med dva različna zaporedna vozla $t_i^{(\ell-1)}$ in $t_{i+1}^{(\ell-1)}$ vrinemo vozel $\frac{t_i^{(\ell-1)}+t_{i+1}^{(\ell-1)}}{2}$. Na numeričnem primeru pokažite, da zaporedje kontrolnih poligonov $C_{k,\boldsymbol{t}^{(\ell)}} f$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ konvergira proti grafu zlepka f.

3. Naj bo $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$ ekvidistantno zaporedje stičnih točk na intervalu $[a, b]$ s korakom h in

   $$\boldsymbol{t} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{k+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \underbrace{b, \ldots, b}_{k+1})$$

   zaporedje vozlov. Za funkcijo $g(x) = \sqrt{1 + x^2} \sin x$ na intervalu $[a, b] = [0, 10]$ izračunajte Schoenbergove aproksimacijske zlepke $Vg \in \mathbb{S}_{3,\boldsymbol{t}}$ za $h = 10^{-\ell}$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Narišite njihove grafe ter izračunajte napake $\|g - Vg\|_{\infty,[a,b]}$. Iz primerjave dveh zaporednih napak numerično ocenite red aproksimacije, to je določite koeficient γ, da bo veljalo

   $$\|g - Vg\|_{\infty,[a,b]} \sim \text{konst}\, h^{\gamma}.$$

   Kakšen je γ pri aproksimaciji funkcije $g(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $[0, 1]$?

4. Naj bo $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$ ekvidistantno zaporedje stičnih točk na intervalu $[a, b]$ s korakom h in

$$\boldsymbol{t} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{k+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \underbrace{b, \ldots, b}_{k+1})$$

zaporedje vozlov. Kvaziinterpolant Q je definiran s predpisom

$$Qg = \sum_{i=1}^{n+k} \lambda_{i,k} g \, B_{i,k}, \quad \lambda_{i,k} g = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \psi_{i,k}^{(j)}(\tau_i) f^{(k-j)}(\tau_i).$$

Naj bo $k = 3$. Uporabite Q na funkciji, ki je vsaj $\mathcal{C}^k([a, b])$ ter numerično izračunajte red aproksimacije, kot je razloženo v nalogi 3. Kakšen je eksponent padanja napake γ, če opazujemo

$$\|g^{(j)} - (Qg)^{(j)}\|_{\infty,[a,b]} \sim \text{konst}\, h^\gamma, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Kakšen red dobite, če aproksimirate funkcije, ki so manjkrat zvezno odvedljive.

5. Naj bo $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n = (0, 1, 2, 2.5, 4, 5.5, 7, 8, 9, 10) = (x_i)_{i=0}^n$ zaporedje stičnih točk na intervalu $[a, b] = [0, 10]$,

$$\boldsymbol{t} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{k+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \underbrace{b, \ldots, b}_{k+1})$$

zaporedje vozlov, $m = \dim \mathbb{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ ter $k = 2\ell - 1$. Funkcijo $g(x) = \sqrt{1 + x^2} \sin x$ interpoliramo z zlepki iz prostora $\mathbb{S}_{k,\boldsymbol{t}}$. Interpolacijske točke izbiramo na sledeče načine:

   (a) Izberemo $\tau_i = t_{i,k}^*$, $i = 1, 2, \ldots, m$.
   (b) Izberemo $\tau_i = t_{i+2}$, $i = \ell + 1, \ldots, m - \ell$, prvih ℓ in zadnjih ℓ interpolacijskih točk pa izberemo ekvidistantno na intervalih (x_0, x_1) ter (x_{n-1}, x_n).
   (c) Izberemo

$$\tau_1 = \cdots = \tau_\ell = a, \quad \tau_{m-\ell+1} = \cdots = \tau_m = b,$$
$$\tau_i = t_{i+2}, \quad i = \ell + 1, \ldots, m - \ell.$$

   V večkratnih točkah interpoliramo poleg vrednosti še odvode dane funkcije.

Izračunajte koeficiente ter narišite grafe interpolacijskih zlepkov za $k = 3$ in $k = 5$. Primerjajte napake.

6. S primeri ponazorite vpliv uteži pri racionalnih krivuljah B-zlepkov (NURBS krivuljah).

7. Izberite zaporedje vozlov $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^{n+k+1}$ in $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1}^{m+\ell+1}$ ter kontrolne točke

$$\boldsymbol{P}_{i,j} \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Narišite kontrolno mrežo ter pripadajočo ploskev B-zlepkov

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{P}_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,\ell}(v).$$