

Vpisna številka

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## Afina in projektivna geometrija

PISNI IZPIT

19.6.2009

Čas reševanja je 105 minut.

Število točk:	
TN	
RN1	
RN2	
RN3	
$\Sigma$	

Ime in priimek

---

### TEORETIČNA NALOGA

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrček čitljivo označi, če je trditev pravilna

**P** oziroma napačna  **N**.

Če ne veš, pusti kvadrček prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

Afina ogrinjača treh točk je lahko premica.

Če je v aksiomatični afini ravnini moč premice  $n$ , potem je vseh različnih premic natanko  $n^2 + n + 1$ .

Afina transformacija slika vzporedne premice v vzporedne premice.

Naj bodo  $A, B, C$  tri različne točke v ravnini  $\mathbb{R}^2$ , ki jo na standardni način vložimo v  $\mathbb{R}P^2$ . Tedaj se premice  $P(A, B)$ ,  $P(A, C)$ ,  $P(B, C)$  sekajo v eni od „neskončnih“ točk.

Naj bo  $V = \mathbb{R}^n$ . Tedaj so projektivne premice v  $P(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}P^{n-1}$  dualne projektivnim podprostorom projektivne dimenzije  $n - 2$ .

Naj bo  $P$  projektivna premica v  $\mathbb{R}P^2$  in naj bo  $f: P \rightarrow P$  projektivnost, ki je različna od identitete. Tedaj ima  $f$  lahko 3 negibne točke.

Naj bosta  $P$  in  $Q$  različni premici v  $\mathbb{R}P^2$ . Vsaka perspektivnost  $P \rightarrow Q$  ima vsaj eno negibno točko.

Naj bo  $S$  neizrojena stožnica v  $\mathbb{R}P^2$ . Tedaj je  $S$  projektivno ekvivalentna množici

$$\{[U^2 : UV : V^2] \mid [U : V] \in \mathbb{R}P^1\}.$$

Če imata premica in stožnica v  $\mathbb{R}P^2$  skupne tri različne točke, je stožnica izrojena.

Če izberemo primerne štiri različne točke  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , je dvorazmerje točk  $[a : 1]$ ,  $[b : 1]$ ,  $[c : 1]$ ,  $[d : 1]$  v  $\mathbb{R}P^1$  enako 1.

1. NALOGA (20 točk)

Naj bo  $\mathbb{Z}_7$  praštevilski obseg s sedmimi elementi.

a. V ravnini  $\mathbb{Z}_7^2$  je podan trikotnik z oglišči  $A(1, 1)$ ,  $B(4, 2)$ ,  $C(2, 3)$ .  
Izračunaj njegovo težišče.

b. Ali obstaja afina transformacija  $\mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ , za katero velja  $1 \mapsto 2$ ,  $2 \mapsto 3$ ,  $5 \mapsto 4$ ?

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. NALOGA (25 točk)

a. Premica  $P$  v projektivni ravnini  $\mathbb{R}P^2$  je podana z enačbo:

$$X + Y + Z = 0.$$

Izračunaj dvorazmerje točk  $[0 : -1 : 1]$ ,  $[1 : -1 : 0]$ ,  $[1 : -2 : 1]$ ,  $[-4 : 1 : 3]$  na  $P$ .

b. Podana je še premica  $Q$ :

$$3X + 2Y - 6Z = 0.$$

Izračunaj presečišče premic  $P$  in  $Q$ .

c. Naj bo  $f: P \rightarrow Q$  projektivnost z lastnostjo

$$f([0 : -1 : 1]) = [2 : 0 : 3], \quad f([1 : -1 : 0]) = [0 : 3 : 2], \quad f([1 : -2 : 1]) = [2 : 3 : 5].$$

Izračunaj  $f([-4 : 1 : 3])$ .

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

3. NALOGA (25 točk)

V projektivni ravnini  $\mathbb{R}P^2$  so podane štiri točke:  $[0 : 0 : 1]$ ,  $[1 : 0 : 1]$ ,  $[2 : 2 : 1]$ ,  $[0 : 1 : 1]$ .

- a. Parametriziraj šop stožnic skozi podane štiri točke.
- b. Izračunaj, katere stožnice šopa so izrojene.

Rešitve oziroma odgovore utemelji.