

Vpisna številka

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Afina in projektivna geometrija

PISNI IZPIT

20.6.2011

Čas reševanja je 105 minut.

Število točk:	
TN	
RN1	
RN2	
RN3	
Σ	

Ime in priimek

TEORETIČNA NALOGA

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna

P oziroma napačna **N**.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

V vektorskem prostoru \mathbb{R}^2 obstajajo 4 afino neodvisne točke.

Ker obstaja obseg s štirimi elementi, obstaja projektivna ravnina z 21 točkami.

Naj bo $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{P}\mathbb{R}^3$ vložitev dvorazsežne afine ravnine. Vsaka projektivnost $\mathcal{P}\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{R}^3$ je zgolj razširitev primerne afine transformacije $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

Vsak par projektivnih premic v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ se seka vsaj v eni točki.

Projektivne točke v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ ustrezajo, po definiciji, premicam v \mathbb{R}^3 , ki vsebujejo izhodišče.

Vsaka projektivnost $\mathcal{P}\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{R}^2$ ima vsaj eno negibno točko.

Naj bosta P in Q različni premici v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ in naj bo $f: P \rightarrow Q$ projektivnost. Če velja $f(P \cap Q) = P \cap Q$, je f identiteta.

Naj bo S neizrojena stožnica v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$. Tedaj je S projektivno ekvivalentna množici

$$\{[a_1U + b_1V : a_2U + b_2V : a_3U + b_3V] \mid [U : V] \in \mathcal{P}\mathbb{R}^2\},$$

za primerno izbrana vektorja (a_1, a_2, a_3) ter $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

Če imata premica in stožnica v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ skupni dve različni točki, je stožnica izrojena.

Naj bo σ permutacija na štirih črkah in naj bodo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ štiri različne točke na standardni projektivni premici $\mathbb{R}P^1$. Za vse možne izbire permutacije σ lahko dvorazmerje $\mathcal{D}(\sigma(\alpha), \sigma(\beta), \sigma(\gamma), \sigma(\delta))$ zavzame kvečjemu 6 različnih vrednosti.

1. NALOGA (20 točk)

Naj bo \mathbb{Z}_5 praštevilski obseg s petimi elementi.

a. Zapiši vse premice skozi točko $(2, 3)$ v afini ravnini $(\mathbb{Z}_5)^2$.

b. Ali obstaja afina transformacija $\mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, za katero velja $1 \mapsto 4, 3 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$?

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. NALOGA (25 točk)

- a. Premica P v projektivni ravnini $\mathbb{R}P^2$ je podana z enačbo: $9X+4Y-6Z=0$. Izračunaj naslednji dvorazmerji točk na P :

$$\mathcal{D}([10:0:15], [-4:9:0], [6:9:15], [0:45:30]),$$

$$\mathcal{D}([2:0:3], [2:3:5], [4:-9:0], [0:9:6]).$$

- b. Naj bo podana še premica $Q: 2X-3Y+5Z=0$.

Ali obstaja projektivnost $P \rightarrow Q$, za katero velja

$$[10:0:15] \mapsto [4,6,2], [-4:9:0] \mapsto [9:16:6],$$

$$[6:9:15] \mapsto [33:52:18], [0:45:30] \mapsto [17:28:10]?$$

- c. Naj bodo A_0, A_1, A_2 tri različne točke, ki pripadajo neki premici P v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ in naj bo A_3 točka, ki ne pripada P . Dalje naj bodo A'_0, A'_1, A'_2 tri različne točke, ki pripadajo neki premici Q v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ in naj bo A'_3 točka, ki ne pripada Q . Dokaži, da obstaja taka projektivnost $\theta: \mathcal{P}\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{R}^3$, za katero je $\theta(A_i) = A'_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Ali je θ s tem pogojem enolično določena?

Rešitve utemelji.

3. NALOGA (25 točk)

V projektivni ravnini $\mathbb{R}P^2$ sta podani stožnici S_1 in S_2 z naslednjima matrikama Q_1 in Q_2 :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obravnavamo pripadajoči šop stožnic.

- a. Katere stožnice iz šopa so izrojene?
- b. Katere točke so skupne vsem stožnicam iz šopa?
- c. Skiciraj stožnici S_1 in S_2 (oziroma pripadajoča dela v \mathbb{R}^2).

Odgovore oziroma rešitve ustrezno utemelji.