

Vpisna številka

--	--	--	--	--	--	--	--

Afina in projektivna geometrija

PISNI IZPIT

20.6.2011

Čas reševanja je 105 minut.

Število točk:

TN	
RN1	
RN2	
RN3	
Σ	

Ime in priimek

TEORETIČNA NALOGA

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna

P oziroma napačna **N**.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

☐

V vektorskem prostoru \mathbb{R}^2 obstajajo 4 afino neodvisne točke.

☐

Ker obstaja obseg s štirimi elementi, obstaja projektivna ravnina z 21 točkami.

☐

Vsaka projektivnost $\mathcal{P}\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{R}^3$ je zgolj razširitev afine transformacije na (standardno vloženi) ravnini \mathbb{R}^2 .

☐

Vsak par projektivnih premic v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ se seka vsaj v eni točki.

☐

Projektivne točke v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ ustrezajo, po definiciji, premicam v \mathbb{R}^3 , ki vsebujejo izhodišče.

☐

Vsaka projektivnost $\mathcal{P}\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{R}^2$ ima vsaj eno negibno točko.

☐

Naj bosta P in Q različni premici v $\mathbb{R}P^2$ in naj bo $f: P \rightarrow Q$ projektivnost. Če velja $f(P \cap Q) = P \cap Q$, je f perspektivnost.

☐

Naj bo S neizrojena stožnica v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$. Tedaj je S projektivno ekvivalentna množici

$$\{[a_1U + b_1V : a_2U + b_2V : a_3U + b_3V] \mid [U : V] \in \mathcal{P}\mathbb{R}^2\},$$

za primerno izbrana vektorja (a_1, a_2, a_3) ter (b_1, b_2, b_3) v \mathbb{R}^3 .

☐

Če imata premica in stožnica v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ skupni dve različni točki, je stožnica izrojena.

☐

Naj bo σ permutacija na štirih črkah in naj bodo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ štiri različne točke na standardni projektivni premici $\mathbb{R}P^1$. Za vse možne izbire permutacije σ lahko dvorazmerje $\mathcal{D}(\sigma(\alpha), \sigma(\beta), \sigma(\gamma), \sigma(\delta))$ zavzame kvečjemu 6 različnih vrednosti.

1. NALOGA (20 točk)

Naj bo \mathbb{Z}_5 praštevilski obseg s petimi elementi.

- a. Zapiši vse premice skozi točko $(2, 3)$ v afini ravnini $(\mathbb{Z}_5)^2$.
- b. Ali obstaja afina transformacija $\mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, za katero velja $1 \mapsto 4, 3 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$?

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. NALOGA (25 točk)

- a. Premica P v projektivni ravnini \mathbb{RP}^2 je podana z enačbo: $9X + 4Y - 6Z = 0$. Izračunaj naslednji dvorazmerji točk na P :

$$\mathcal{D}([10 : 0 : 15], [-4 : 9 : 0], [6 : 9 : 15], [0 : 45 : 30]),$$

$$\mathcal{D}([2 : 0 : 3], [2 : 3 : 5], [4 : -9 : 0], [0 : 9 : 6]).$$

- b. Naj bo podana še premica Q : $2X - 3Y + 5Z = 0$.

Ali obstaja projektivnost $P \rightarrow Q$, za katero velja

$$[10 : 0 : 15] \mapsto [4, 6, 2], [-4 : 9 : 0] \mapsto [9 : 16 : 6],$$

$$[6 : 9 : 15] \mapsto [33 : 52 : 18], [0 : 45 : 30] \mapsto [17 : 28 : 10]?$$

- c. Naj bodo A_0, A_1, A_2, A_3 take točke v projektivni ravnini \mathcal{PR}^3 , da nobena trojica ne leži na isti projektivni premici. Enako naj velja za točke A'_0, A'_1, A'_2, A'_3 . Dokaži, da obstaja taka projektivnost $\theta: \mathcal{PR}^3 \rightarrow \mathcal{PR}^3$, za katero je $\theta(A_i) = A'_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Ali je θ s tem pogojem enolično določena?

Rešitve utemelji.

3. NALOGA (25 točk)

V projektivni ravnini \mathbb{RP}^2 sta podani stožnici S_1 in S_2 z naslednjima matrikama Q_1 in Q_2 :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obravnavamo pripadajoči šop stožnic.

- a. Katere stožnice iz šopa so izrojene?
- b. Katere točke so skupne vsem stožnicam iz šopa?
- c. Skiciraj stožnici S_1 in S_2 (oziroma pripadajoča dela v \mathbb{R}^2).

Odgovore oziroma rešitve ustrezno utemelji.