Ime in priimek: ____________ Vpisna številka: | | | | | | | | | Ocena:

1	2	3	4	Σ

1. PISNI IZPIT
Afina in projektivna geometrija

4. rožnik 2012

Čas reševanja je 97 minut in 24 sekund. Vse naloge so enakovredne. Vse korake dobro utemelji. Uporaba kalkulatorja, zapiskov in druge literature ni dovoljena.

1. Dan je dvorazsežen vektorski prostor V nad obsegom $\mathbb{Z}_3$.

2	$+$	$*$	$\Diamond$
1	$+$	$\Diamond$	$*$
0	$\bullet$	$\blacksquare$	$\blacksquare$
	0	1	2

Točke v V, označene z isto oznako, ležijo v istem enorazsežnem podprostoru V. Uporabimo kar isto oznako, kot jo imajo od izhodišča različne točke na enorazsežnem podprostoru V, za točko v $\mathcal{P}(V)$.

(a) Določi $\mathcal{D}(+, *, \Diamond, \blacksquare)$.

(b) Zapiši afino transformacijo $\tau : V \to V$, za katero $\tau(1,0) = (1,1)$, $\tau(2,0) = (0,0)$ ter $\tau(2,1) = (1,2)$ kot $\tau(x) = Ax + b$, kjer je A linearna preslikava na V in b vektor translacije za τ.

Rešitev. (a) Dvorazmerje štirih različnih točk na projektivni premici nad $\mathbb{Z}_3$ je vedno -1 (ker ni 0 niti 1).
(b) Vektor b lahko določimo iz

$$(0,0) = \tau(2,0) = A(2,0) + b = 2A(1,0) + b \quad \text{in}$$

$$(1,1) = \tau(1,0) = A(1,0) + b.$$

Če dvakrat drugi enakosti odštejemo prvo, dobimo $(2,2) = b$. Če od prve enakosti odštejemo drugo, dobimo $A(1,0) = -(1,1)$. Upoštevamo še tretji podatek:

$$(1,2) = A(2,1) + b = A(2,0) + b + A(0,1) = \tau(2,0) + A(0,1) = (0,0) + A(0,1),$$

torej $(1,2) = A(0,1)$ oz. je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Dani sta podmnožici $P_1 := \{x^3 + ax^2 + bx + 1 | a, b \in \mathbb{R}\}$ in $P_2 := \{x^3 + x^2 + cx + d | c, d \in \mathbb{R}\}$ v prostoru vseh polinomov z realnimi koeficienti $\mathbb{R}[x]$.

   (a) Dokaži, da sta P_1 in P_2 afina podprostora v $\mathbb{R}[x]$. Kolikšni sta njuni dimenziji?

   (b) Določi afino ogrinjačo P_1 in P_2. Koliko je njena dimenzija?

Rešitev. (a) Opazimo lahko, da je

$$P_1 = x^3 + 1 + \{ax^2 + bx | a, b \in \mathbb{R}\} = x^3 + 1 + \mathrm{Lin}\{x^2, x\},$$

$$P_2 = x^3 + x^2 + \{cx + d | c, d \in \mathbb{R}\} = x^3 + x^2 + \mathrm{Lin}\{x, 1\}.$$

Torej sta P_1 in P_2 afina prostora, oba dimenzije 2.
(b) Po lemi 2.13 iz predavateljeve skripte je

$$\mathrm{Af}(P_1 \cup P_2) = x^3 + 1 + (\mathrm{Lin}\{x^2, x\} + \mathrm{Lin}\{x, 1\} + \mathrm{Lin}\{x^3 + x^2 - (x^3 + 1)\}) = x^3 + \mathrm{Lin}\{x^2, x, 1\}.$$

Torej je afina ogrinjača (unije) prostorov P_1 in P_2 dimenzije 3.

3. Dana je stožnica $\mathcal{S}$ v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ z matriko

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ter točke $P = [1 : 1 : 0]$, $Q = [0 : 1 : 1]$ in $T = [1 : 1 : 1]$. Določi perspektivnost iz polare točke P glede na $\mathcal{S}$ na polaro točke Q glede na $\mathcal{S}$ s centrom T.

Rešitev. Polara p točke P glede na $\mathcal{S}$ ima enačbo

$$\langle (x, y, z), M(1, 1, 0)\rangle = 2x + 2y + z = 0$$

in polara q točke Q glede na $\mathcal{S}$ ima enačbo

$$\langle (x, y, z), M(0, 1, 1)\rangle = x + 2y + z = 0.$$

V nadaljevanju bomo oznaki p in q uporabljali tako za projektivni premici kot za dvorazsežna podprostora v $\mathbb{R}^3$, ki jima pripadata. Perspektivnost $\tau : p \to q$ preslika točko $[x : y : z] \in p$ v $\mathrm{Lin}\{(x, y, z), (1, 1, 1)\} \cap q$. To je enorazsežen vektorski prostor v $\mathbb{R}^3$, napet na vektor $(x, y, z)+(t, t, t)$ za neki realni parameter t, ki je določen tako, da točka ustreza enačbi za q, torej

$$x + t + 2(y + t) + z + t = 0.$$

Upoštevajmo, da za $[x : y : z] \in p$ velja $z = -2x - 2y$, torej

$$x + t + 2(y + t) + -2x - 2y + t = 0 \text{ oz.}$$

$$-x + 4t = 0 \text{ oz.}$$
$$t = \frac{x}{4},$$

kar pomeni

$$\tau[x : y : z] = \left[\frac{5x}{4} : y + \frac{x}{4} : z + \frac{x}{4}\right].$$

4. Dan je trorazsežen vektorski prostor V nad obsegom $\mathbb{R}$ in neprazna neizrojena stožnica $\mathcal{S}$ v $\mathcal{P}(V)$, v standardni (ortonormirani) bazi V podana z matriko M (oz. kvadratno formo $\vec{x} \mapsto \langle \vec{x}, M\vec{x} \rangle$). Nadalje naj bo

$$\mathcal{T} := \{p_X | X \in \mathcal{S} \text{ in } p_X \text{ tangenta na } \mathcal{S} \text{ v } X\}.$$

Dokaži, da je $\mathcal{T}^\perp$ (tj. s preslikavo zgornji anihilator preslikana množica tangent stožnice $\mathcal{S}$) stožnica v $\mathcal{P}(V^*)$. Določi tudi matriko za $\mathcal{T}^\perp$ v dualni bazi standardne baze V.

Namig. Če je $\vec{x} \in V$ vektor z $\langle \vec{x}, M\vec{x} \rangle = 0$ (tj. $X := \mathrm{Lin}\{\vec{x}\} \in \mathcal{S}$), tedaj je tangenta $p_X \in \mathcal{T}$ predstavljena z nekim dvorazsežnim podprostorom $\Pi_X \leq V$. Z zgornjim anihilatorjem preslikan Π_X je linearna premica (tj. premica skozi izhodišče) v V^*, katere smerni vektor ima v dualni bazi koeficiente, enake koeficientom normale na Π_X. Ko iz podatkov določiš to normalo $\vec{n}_X$, poišči matriko M', da bodo $\vec{n}_X$ ravno rešitve enačbe $\langle \vec{n}_X, M'\vec{n}_X \rangle = 0$.

Rešitev. Tangenta na $\mathcal{S}$ v točki $X = \mathrm{Lin}\{\vec{x}\}$ je ravno polara točke X glede na $\mathcal{S}$, ki je po definiciji ravno množica točk $Y = \mathrm{Lin}\{\vec{y}\}$, ki zadoščajo $\langle \vec{y}, M\vec{x} \rangle = 0$. Torej tangenti na $\mathcal{S}$ v točki $X = \mathrm{Lin}\{\vec{x}\}$ pripada dvorazsežen vektorski podprostor Π_X v V z normalo $M\vec{x}$. Torej zgornji anihilator slika p_X v vektor iz V^*, ki ima v dualni bazi standardne baze V iste komponente, kot jih ima vektor $M\vec{x} \in V$ v standardni bazi V. Izračunamo

$$\{M\vec{x} | \langle \vec{x}, M\vec{x} \rangle = 0\} = \{\vec{y} | \langle M^{-1}\vec{y}, MM^{-1}\vec{y} \rangle = 0\} = \{\vec{y} | \langle M^{-1}\vec{y}, \vec{y} \rangle = 0\}.$$

Torej so točke množice $\mathcal{T}^\perp$ ravno $\mathrm{Lin}\{\vec{y}\} \leq V^*$, kjer za $\vec{y}$ velja $\langle M^{-1}\vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$ oz. je $\vec{y}$ ničla kvadratne forme, določene z matriko M^{-1}.

Da je inverz matrike M sploh definiran, sledi iz neizrojenosti stožnice $\mathcal{S}$, kar pomeni, da je rang matrike, ki $\mathcal{S}$ definira, maksimalen, torej 3.