Ime in priimek: ____________ Vpisna številka: | | | | | | | | | Ocena:

1	2	3	4	Σ

2. PISNI IZPIT
Afina in projektivna geometrija

20. junij 2012

Čas reševanja je 120 minut. Vse naloge so enakovredne. Vse korake dobro utemelji.
Uporaba kalkulatorja, zapiskov in druge literature ni dovoljena.
Izpit je natisnjen z ekološkim črnilom na recikliranem papirju. Če svojega izdelka ne boš oddal(a), ga odvrzi v zabojnik za ločeno zbiranje papirja. **Srečno!**

1. Dokaži, da predpis $\tau : p(x) \mapsto p(2-x) + x^2 - 1$ določa afino transformacijo na prostoru $\mathbb{R}[x]$ vseh polinomov z realnimi koeficienti. Zapiši sliko afinega podprostora $\{ax^3 + x + b | a, b \in \mathbb{R}\}$ pri tej transformaciji kot $v + U$, kjer je v neki vektor (polinom) iz $\mathbb{R}[x]$ in U linearni podprostor.

   Rešitev. Preslikava $A : p(x) \to p(2-x)$ je obrnljiva linearna (je sama svoj inverz), $p(x) \to p(x) + x^2 - 1$ pa translacija. Ker τ lahko zapišemo kot kompozitum obrnljive linearne preslikave in translacije, je afina.
   Oglejmo si sliko splošnega polinoma iz afinega prostora $P := \{ax^3 + x + b | a, b \in \mathbb{R}\}$.

$$\tau(ax^3 + x + b) = a(2-x)^3 + (2-x) + b + x^2 - 1 = -ax^3 + 6ax^2 - 12ax + 8a + 2 - x + b + x^2 - 1 =$$

$$= a(-x^3 + 6x^2 - 12x + 8) + b + x^2 - x + 1,$$

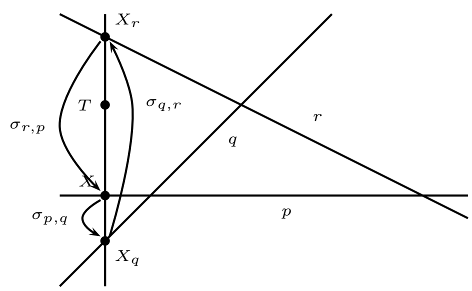
   torej je $U = \{a(-x^3 + 6x^2 - 12x + 8) + b | a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Lin}\{(-x^3 + 6x^2 - 12x + 8, 1\}$ in $v = x^2 - x + 1$.

2. Dane so različne premice p, q, r v projektivni ravnini in točka $T \notin p \cup q \cup r$. Naj bodo $\sigma_{p,q}, \sigma_{q,r}, \sigma_{r,p}$ zapored perspektivnosti iz p v q, iz q v r in iz r v p, vse s centrom T. Dokaži: $\sigma_{r,p} \circ \sigma_{q,r} \circ \sigma_{p,q} = id_p$, kjer id_p označuje identično preslikavo $p \to p$.

Rešitev. Slika poljubne točke $X \in p$ pri perspektivnosti $\sigma_{p,q}$ je presek projektivne premice skozi X in T (ki jo označimo s t_X) s premico q, označimo to točko z X_q. Slika X_q pri perspektivnosti $\sigma_{q,r}$ je presek premice skozi T in X_q (ki je sper kar premica t_X) s premico r, označimo to točko z X_r. Slika X_r pri perspektivnosti $\sigma_{r,p}$ pa je presek premice skozi T in X_r (ki je ponovno premica t_X) in premice p. Ker tako t_X kot p vsebujeta točko X in ker se vsaki dve projektivni premici sekata v natanko eni točki, je

$$\sigma_{r,p} \circ \sigma_{q,r} \circ \sigma_{p,q}(X) = \sigma_{r,p} \circ \sigma_{q,r}(X_q) = \sigma_{r,p}(X_r) = X$$

oz. je $\sigma_{r,p} \circ \sigma_{q,r} \circ \sigma_{p,q}$ res identična preslikava.



3. Dani sta matriki

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Določi prazne in izrojene stožnice v šopu stožnic, določenih z matrikama M in N.

Rešitev. Matrika N ima lastne vrednosti $1+\sqrt{3}$, 1 ter $1-\sqrt{3}$, torej je stožnica, določena z njo, neprazna (ena negativna in dve pozitivni lastni vrednosti) neizrojena (N je polnega ranga). Torej iščemo prazne in izrojene stožnice med matrikami $M+tN$. V ta namen izračunamo

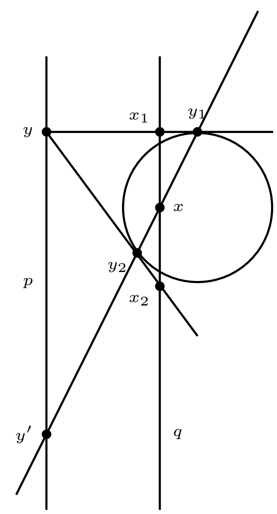
$$\det M + tN = \det \begin{bmatrix} 1 & 1+t & 0 \\ 1+t & 1+t & 1+t \\ 0 & 1+t & 2t \end{bmatrix} = -1 - 2t - 3t^2 - 2t^3 = (t+1)(-2t^2 - t - 1).$$

Drugi faktor nima realnih ničel, torej je edina izrojena stožnica v šopu tista z matriko $M-N$. Če je t večji od -1, ima matrika $M+tN$ dve pozitivni in eno negativno lastno vrednost, torej so pripadajoče stožnice neizrojene. Če pa je t manjši od -1, pa ima $M+tN$ dve negativni in eno pozitivno lastno vrednost, torej so pripadajoče stožnice spet neprazne in zato v družini stožnic, določenih z matrikama M in N, sploh ni izrojenih stožnic.

4. Na današnji dan leta 1866 je umrl sloviti nemški matematik Bernhard Riemann, rojen leta 1826. Aktivno je deloval na številnih področjih, predvsem odmevni pa so njegovi rezultati v kompleksni analizi[1]. Njemu v spomin naj bo $x \neq 0$ točka v krogu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ in p polara točke x glede na krožnico $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, q pa vzporednica k p skozi točko x. Za poljubno točko $y \in p$ označimo z x_1 in x_2 presečišči tangent iz y na krožnico Γ s premico q. Dokaži, da je x razpolovišče daljice x_1x_2.

   Namig. Oglej si premico skozi dotikališči tangent iz y na Γ.

   Rešitev.



Označimo dotikališči tangent iz y na Γ z y_1 in y_2. Premica skozi y_1 in y_2 je polara točke y glede na krožnico Γ, torej po izreku vsebuje x (saj polara točke x glede na Γ vsebuje y). Označimo z y' presečišče premice y_1y_2 s p (če se premici ne sekata, je premica $y_1y_2 = q$ polara točke y glede na Γ in rezultat trivialno sledi). Po karakterizaciji polare z vaj velja, da y_1, y_2, x in y' tvorijo harmonično četverko. Torej šop premic yy_1, yy_2, yx in $p = yy'$ tvorijo harmonično četverko. Po nalogi z vaj pa zato $x = q \cap yx$ razpolavlja daljico med $x_1 = q \cap yy_1$ in $x_2 = q \cap yy_2$.

[1] Morda najznamenitejši še nerešen matematični problem je prav Riemannova hipoteza, ki se dandanašnji pojavlja v številnih inkarnacijah. Ena od možnih formulacij sprašuje, ali imajo vse netrivialne ničle Riemannove ζ funkcije realni del $\frac{1}{2}$. Za popolno rešitev 4. naloge ti ni treba dokazati te hipoteze, fusnota je tu zgolj kot zanimivost.