

1. izpit iz Afine in projektivne geometrije

4. junij 2013

1. [20] Izometrija evklidske ravnine $\tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dana s predpisom

$$\tau(x, y) = \frac{1}{2} \left(-x - \sqrt{3}y + 6, \sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} \right).$$

- (a) [10] Geometrično opiši izometrijo τ .
(b) [10] Zapiši τ kot kompozicijo dveh zrcaljenj čez premici v ravnini.
2. [20] Preslikava $F: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ je dana s predpisom

$$(Fp)(x) = x \cdot p'(x) + p(1) + x + 1$$

za poljuben $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

- (a) [10] Zapiši predpis za preslikavo F v koordinatah na $\mathbb{R}_2[x]$, ki jih določa baza $\{x^2, x, 1\}$, in pokaži, da je F afina transformacija.
(b) [10] Dana je množica $\mathcal{A} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 1, p(1) = 1\}$. Pokaži, da je \mathcal{A} afin podprostor v $\mathbb{R}_2[x]$ in nato zapiši njegovo sliko v obliki $F(\mathcal{A}) = a + U$, kjer je $a \in \mathbb{R}_2[x]$ in $U \subset \mathbb{R}_2[x]$ nek linearni podprostor.
3. [20] V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani premici

$$p = \{[x : y : z] \mid x - y + z = 0\},$$
$$q = \{[x : y : z] \mid x - y - z = 0\}$$

in točke $A = [1 : 1 : 0]$, $B = [0 : 1 : 1]$, $C = [-1 : 0 : 1]$ in $D = [1 : 2 : 1]$ na p .

- (a) [5] Ali tvorijo točke A, B, C in D harmonično četverko?
(b) [10] Naj projektivnost $\theta: p \rightarrow q$ zadošča pogojem $\theta(B) = [0 : -1 : 1]$, $\theta(C) = [1 : 0 : 1]$ in $\theta(D) = [-1 : -2 : 1]$. Izračunaj predpis za θ .
(c) [5] Ali je preslikava θ perspektivnost? Če je, poišči njen center.
4. [20] V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani stožnici

$$\mathcal{S}_1 = \{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 - z^2 - 2xz = 0\},$$
$$\mathcal{S}_2 = \{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 - z^2 + 2xz = 0\}.$$

- (a) [10] Poišči vse izrojene stožnice v šopu stožnic, ki ga določata \mathcal{S}_1 in \mathcal{S}_2 .
(b) [10] Skiciraj stožnici $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ ter vse izrojene stožnice iz pridruženega šopa na afinem delu projektivne ravnine glede na standardno vložitev afine ravnine v projektivno ravnino. Koliko točk je skupnih vsem stožnicam iz tega šopa?