Vpisna številka

Afina in projektivna geometrija

PISNI IZPIT

14.9.2010

Čas reševanja je 105 minut.

Število točk:	
TN	
RN1	
RN2	
RN3	
Σ	

Ime in priimek

TEORETIČNA NALOGA

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.
Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^2$ obstajajo 3 afino neodvisne točke.
- V afini ravnini $\mathbb{Z}_5^2$ je natanko 5 različnih šopov vzporednic.
- Vsaka projektivnost $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ je določena z neko simetrično matriko reda 3×3.
- Naj bosta P in Q projektivni premici v $\mathbb{R}P^2$. Če se P in Q sekata v več kot eni točki, sta P in Q enaki.
- Dva različna neničelna vektorja v $\mathbb{R}^3$ predstavljata dve različni projektivni točki v $\mathbb{R}P^2$.
- Vsaka projektivnost $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ ima vsaj eno negibno točko.
- Naj bosta P in Q različni premici v $\mathbb{R}P^2$ in naj bo $f\colon P \to Q$ bijekcija. Če f ohranja dvorazmerja, je f projektivnost.
- Naj bo S neprazna neizrojena stožnica v $\mathbb{R}P^2$. Tedaj je S projektivno ekvivalentna množici
$$\{[X : Y : Z] \mid XZ - Y^2 = 0\}.$$
- Če imata premica in stožnica v $\mathbb{R}P^2$ skupne tri različne točke, je stožnica izrojena.
- Naj bo S neprazna neizrojena stožnica v $\mathbb{R}P^2$ in naj bo C točka, ki ne pripada S. Tedaj obstaja natanko ena tangenta na S, ki vsebuje C.

1. NALOGA **(20 točk)**

Naj bo $\mathbb{Q}$ obseg racionalnih števil in naj bo

$$\mathcal{O} = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Q} \text{ in } b \in \mathbb{Q}\}.$$

a. Dokaži, da je $\mathcal{O}$ obseg.
b. Poišči vse avtomorfizme obsega $\mathcal{O}$.

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. NALOGA **(30 točk)**

V projektivni ravnini $\mathbb{R}P^2 = \mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$ sta podani premici:

$$P = \{[X : Y : Z] \,|\, X - 2Y + 2Z = 0\}, \quad Q = \{[X : Y : Z] \,|\, 2X - 3Y + 6Z = 0\}.$$

a. Dokaži, da obstaja projektivnost $f\colon P \to Q$, za katero velja

$$[4 : 1 : -1] \mapsto [1 : 2 : 1],\ [2 : 1 : 0] \mapsto [2 : 0 : -1],$$
$$[6 : 2 : -1] \mapsto [5 : 2 : -1],\ [2 : 2 : 1] \mapsto [11 : -2 : -7].$$

b. Ali je projektivnost f iz **a.** morda perspektivnost?

c. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^{2n}$ sta podana podprostora $U = \mathbb{R}^n \times \{0\}^n$ in $V = \{0\}^n \times \mathbb{R}^n$. Dokaži, da za vsako projektivnost $\mathcal{A}\colon \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(V)$ obstaja tak podprostor $T \leqslant \mathbb{R}^{2n}$, da je $\mathcal{A}$ v resnici perspektivnost s središčem T.

Rešitve utemelji.

3. NALOGA **(20 točk)**

V projektivni ravnini $\mathbb{R}P^2$ sta podani točki: $A = [0 : -1 : 1]$, $B = [0 : 1 : 1]$.

a. Poišči vse stožnice S, ki vsebujejo točki A in B.
(Rešitev zapiši kot kvadratno formo s parametri.)

b. Podana je še točka $C = [1 : 1 : 1]$. Za katere stožnice S iz točke **a.** je premica $X + Y - 2Z = 0$ tangenta z dotikališčem C?

Odgovore oziroma rešitve ustrezno utemelji.