

Vpisna številka

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Afina in projektivna geometrija

PISNI IZPIT

5.9.2011

Čas reševanja je 105 minut.

Število točk:	
TN	
RN1	
RN2	
RN3	
Σ	

Ime in priimek

TEORETIČNA NALOGA

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna

P oziroma napačna **N**.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

V vektorskem prostoru \mathbb{R}^2 obstajajo 4 afino neodvisne točke.

Ker obstaja obseg s štirimi elementi, obstaja projektivna ravnina z 21 točkami.

Vsaka projektivnost $\mathcal{P}\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{R}^3$ je zgolj razširitev afine transformacije na (standardno vloženi) ravnini \mathbb{R}^2 .

Vsak par projektivnih premic v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ se seka vsaj v eni točki.

Projektivna premica v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ je po definiciji premica v \mathbb{R}^3 , ki vsebuje izhodišče.

Vsaka projektivnost $\mathcal{P}\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{R}^3$ ima vsaj eno negibno točko.

Naj bosta P in Q različni premici v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ in naj bo $f: P \rightarrow Q$ projektivnost. Če velja $f(P \cap Q) = P \cap Q$, je f perspektivnost.

Naj bo S neizrojena stožnica v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$. Tedaj je S projektivno ekvivalentna množici

$$\{[a_1U + b_1V : a_2U + b_2V : a_3U + b_3V] \mid [U : V] \in \mathcal{P}\mathbb{R}^2\},$$

za primerno izbrana vektorja (a_1, a_2, a_3) ter (b_1, b_2, b_3) v \mathbb{R}^3 .

Če imata premica in stožnica v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ skupni dve različni točki, je stožnica izrojena.

Naj bo σ permutacija na štirih črkah in naj bodo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ štiri različne točke na standardni projektivni premici $\mathcal{P}\mathbb{R}^2$. Za vse možne izbire permutacije σ lahko dvorazmerje $D(\sigma(\alpha), \sigma(\beta), \sigma(\gamma), \sigma(\delta))$ zavzame kvečjemu 6 različnih vrednosti.

1. NALOGA (20 točk)

Obravnavamo (do izomorfizma edini) obseg \mathcal{O} s štirimi elementi, ki jih označimo $\{0, 1, \varphi, 1 + \varphi\}$.

Tabeli za seštevanje in množenje sta kot sledi:

+	0	1	φ	$1 + \varphi$
0	0	1	φ	$1 + \varphi$
1	1	0	$1 + \varphi$	φ
φ	φ	$1 + \varphi$	0	1
$1 + \varphi$	$1 + \varphi$	φ	1	0

.	0	1	φ	$1 + \varphi$
0	0	0	0	0
1	0	1	φ	$1 + \varphi$
φ	0	φ	$1 + \varphi$?
$1 + \varphi$	0	$1 + \varphi$?	?

- a. Na podlagi vedenja, da gre za obseg, dopolni manjkajoča mesta v tabeli za množenje.
- b. Ali obstaja avtomorfizem $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$, za katerega velja $f(\varphi) = 1 + \varphi$?

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. NALOGA (20 točk)

a. Premica Q v projektivni ravnini $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ je podana z enačbo:

$$9X + 4Y - 6Z = 0.$$

Izračunaj dvorazmerje točk $[10 : 0 : 15]$, $[-4 : 9 : 0]$, $[6 : 9 : 15]$, $[0 : 45 : 30]$ na Q .

b. Naj bo q premica v \mathbb{R}^2 , ki pripada Q , premica p v \mathbb{R}^2 pa naj bo podana z enačbo

$$x + y = -1.$$

Naj bo $f: p \rightarrow q$ afina transformacija z lastnostjo

$$f((0, -1)) = \left(\frac{2}{3}, 0\right), \quad f((1, -1)) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Izračunaj $f\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Rešitve utemelji.

3. NALOGA (30 točk)

V projektivni ravnini $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ sta podani stožnici S_1 in S_2 z naslednjima matrikama Q_1 in Q_2 :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obravnavamo pripadajoči šop stožnic.

- a. Katere stožnice iz šopa so izrojene?
- b. Katere točke so skupne vsem stožnicam iz šopa?
- c. Skiciraj eno od stožnic S_1 in S_2 (oziroma pripadajoči del v \mathbb{R}^2).

Odgovore oziroma rešitve ustrezno utemelji.