Ime in priimek: ____________________ Vpisna številka: | | | | | | | | | Ocena:

1	2	3	4	Σ

3. PISNI IZPIT
Afina in projektivna geometrija

3. september 2012

Čas reševanja je 120 minut. Vse naloge so enakovredne. Vse korake dobro utemelji.
Uporaba kalkulatorja, zapiskov in druge literature ni dovoljena.

1. Dana je afina ravnina $\mathcal{A}$ nad obsegom $\mathbb{F}$ karakteristike različne od 2 ter točki $x, y \in \mathcal{A}$. Za afino transformacijo $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ vemo $\tau(x) = y$. Za poljubno točko z označimo z $\mathcal{S}_z$ šop premic v $\mathcal{A}$ skozi točko z.

   (a) Dokaži, da τ inducira bijekcijo $\widetilde{\tau} : \mathcal{S}_x \to \mathcal{S}_y$.

   (b) Dokaži: če poznamo slike $q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{S}_y$ treh različnih premic $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{S}_x$ pri preslikavi $\widetilde{\tau}$, lahko določimo $\widetilde{\tau}(p)$ za poljubno $p \in \mathcal{S}_x$.

   (c) S primerom pokaži, da $\widetilde{\tau}$ še ne določa afine transformacije τ.

2. V realni projektivni ravnini so dane točke $A = [0 : 0 : 1]$, $B = [0 : 1 : 0]$, $C = [1 : 0 : 0]$, $D = [1 : 1 : 1]$ in $[1 : 2 : 3]$.

   (a) Določi matriko stožnice $\mathcal{S}$ skozi danih 5 točk.

   (b) Določi dvorazmerje $\mathcal{D}[A, B, C, D]$.

   (c) Določi enačbo polare točke $[1 : 0 : -1]$ glede na $\mathcal{S}$.

3. V realni projektivni ravnini sta dani premici

$$\mathcal{P} = \{[X : Y : Z] | X + Y = 0\} \quad \text{in} \quad \mathcal{Q} = \{[X : Y : Z] | 2X - Y + Z = 0\}.$$

Za projektivnost $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ velja $f([0 : 0 : 1]) = [1 : 0 : -2]$, $f([1 : -1 : 0]) = [2 : -1 : -5]$ ter $f([1 : -1 : 2]) = [0 : 1 : 1]$. Določi $f(p)$ za vsako točko $p \in \mathcal{P}$. Ali je f perspektivnost? Če da, določi njen center.

4. Naj $\mathcal{V}$ označuje prostor vseh preslikav $[-1,1] \to \mathbb{R}$ (ne nujno zveznih). Seštevanje in množenje s skalarjem definiramo po točkah, torej $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ in $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ za vsaka $f, g \in \mathcal{V}$, vsak $\lambda \in \mathbb{R}$, vse $x \in [-1,1]$. (Da je s tako določenima operacijama $\mathcal{V}$ vektorski prostor, ni potrebno preverjati.) Definirajmo podmnožici $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{C}^1_{-0} := \{f \in \mathcal{V} | f \text{ zvezna na } [-1,0] \text{ in na } (0,1],\ \lim_{t \downarrow 0} f(t) - f(0) = 1\} \text{ in}$$

$$\mathcal{C}^1_{+0} := \{f \in \mathcal{V} | f \text{ zvezna na } [-1,0) \text{ in na } [0,1],\ f(0) - \lim_{t \uparrow 0} f(t) = 1\}.$$

Dokaži, da sta $\mathcal{C}^1_{-0}$ in $\mathcal{C}^1_{+0}$ izomorfna afina podprostora v $\mathcal{V}$ in ju zapiši kot $v_- + U_-$, $v_+ + U_+$, kjer sta $v_-, v_+ \in \mathcal{V}$ ter U_-, U_+ vektorska podprostora v $\mathcal{V}$. (Izomorfnost pomeni obstoj obrnljive afine transformacije iz enega prostora v drugega.)