Rešitve 1. testa
Afina in projektivna geometrija

2. april 2012

[**P**] Naj bo $\mathbb{F} := \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ obseg s standardnim množenjem in seštevanjem, podedovanim iz $\mathbb{R}$ in naj bo $V := \mathbb{F}^2$. Obstaja semilinearna preslikava $V \to V$, ki ni linearna.
Obstaja avtomorfizem $\mathbb{F}$, ki preslika $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$.

[**P**] Naj bo $\mathcal{A} := (\mathbb{Z}_3)^2$ afin prostor. Moč afine geometrije $\mathbf{A}(\mathcal{A})$ je 22.
Število točk (0-razsežnih afinih podprostorov) je 9, premic (1-razsežnih afinih podprostorov) je 12 in ravnina (2-razsežen afin podprostor) je ena.

[**P**] Točke $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ in $(1, 1, 1)$ iz $\mathbb{Q}^3$ so afino neodvisne.
Npr. $(1, 0, 1) - (0, 0, 1)$, $(0, 1, 0) - (0, 0, 1)$ in $(1, 1, 1) - (0, 0, 1)$ so linearno neodvisne.

[**N**] Naj bo U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ in $a \in \mathbb{R}^n \setminus U$. Definirajmo afin prostor $\mathcal{A} := a + U$. Tedaj je $\mathcal{A} = b + U$ za $b \in \mathbb{R}^n$ natanko tedaj, ko $a + b \in U$.
Ne, $a + U = b + U$, če $(a - b) + U = U$, torej če $a - b \in U$.

[**N**] Če ima premica v aksiomatsko definirani afini ravnini $\mathcal{A}$ moč 9, tedaj ima $\mathcal{A}$ moč 91.
ADAR reda n ima n^2 točk, ADPR reda $n + 1$ pa ima $n^2 + n + 1$ točk.

[**P**] Naj bo $\mathbb{F}$ obseg karakteristike različne od 2 in naj bo $\mathcal{A}$ afin prostor dimenzije 2 nad $\mathbb{F}$. V $\mathcal{A}$ veljata Desarguesova izreka.
Veljata, kajpada.

[**P**] V aksiomatsko definirani afini ravnini obstaja vsaj en par vzporednic.
Obstajajo tri nekolinearne točke, dve od njih določata premico (p), skozi tretjo pa lahko potegnemo vzporednico k p.

[**N**] Obstaja projektivna ravnina moči n^2 za neko naravno število $n > 1$.
(Končne) projektivne ravnine so moči $n^2 + n + 1$, $n > 2$, kar nikoli ni popoln kvadrat.

[**N**] Naj bo V vektorski prostor nad poljem z $\infty > \dim V > 2$. Spodnji anhilator kot preslikava $\mathcal{P}(V^*) \to \mathcal{P}(V)$ je izomorfizem projektivnih geometrij.
Anhilatorja obračata inkluzije.

[**P**] Izjava *"obstajata dva trikotnika v perspektivni legi"* je dualna izjavi *"obstajata trikotnika ABC in $A'B'C'$, da so presečišča $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ in $CA \cap C'A'$ kolinearne točke"*.
Da se tri premice sekajo v eni točki, je dualno temu, da so tri točke kolinearne. Premisli, da v konkretnem primeru res nastopajo prave tri premice in točke.