Rešitve 2. testa
Afina in projektivna geometrija

28. maj 2012

[**P**] Skozi 5 različnih točk v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$, med katerimi nobene tri niso kolinearne, poteka kvečjemu ena stožnica.

Kvadratna forma je z vrednostmi na takšni peterki točk že enolično določena.

[**P**] Vsaka kolineacija $\mathcal{P}\mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}\mathbb{R}^3$ je projektivnost.

Saj ni netrivialnih avtomorfizmov obsega $\mathbb{R}$.

[**P**] Naj bosta $A = [1+i : 2+i : 1]$ in $B = [2 : 3-i : 1-i]$ točki v $\mathcal{P}\mathbb{C}^3$. Velja $A = B$.

$(2, 3-i, 1-i) = (1-i)(1+i, 2+i, 1)$.

[**P**] V $\mathcal{P}\mathbb{Z}_5^3$ obstajata različni premici p in q ter projektivnost $\tau : p \to q$, ki ni perspektivnost.

Poljubna projektivnost, ki ne fiksira presečišča p in q, ni perspektivnost.

[**P**] Dani sta stožnici $\mathcal{S} = \{[X : Y : Z] | 2X^2 + 2XY + 2Y^2 - Z^2 = 0\}$ ter $\mathcal{S}' = \{[X : Y : Z] | -X^2 + Y^2 + 4YZ + Z^2 = 0\}$ v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$. Obstaja projektivnost $\tau : \mathcal{P}\mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}\mathbb{R}^3$, da je $\tau(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$

Obe stožnici sta neprazni neizrojeni.

[**P**] Različne točke A, B, C in D na stožnici v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ tvorijo harmonično četverko, če $\mathcal{D}(D, C, B, A) = -1$.

Ja, poglej v formule (ali pa: če $c = a + b$ in $d = -a + b$, tedaj $2b = c + d$ in $2a = c - d$, razmerje koeficientov pri zadnji točki je -1).

[**N**] Bodi τ perspektivnost iz Π v Σ s centrom L, kjer sta Σ in Π dvorazsežna vektorska podprostora in L enorazsežen vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$, ki ni vsebovan pod Σ ali Π. Naj bosta L_1, L_2 premici v Π skozi izhodišče. Vedno velja, da je kot med L_1 in L_2 enak kotu med $\tau(L_1)$ in $\tau(L_2)$.

Naj bo $\Sigma = \{x = 0\}$ in $\Pi = \{y = 0\}$, $L = \{x = y = z\}$, $L_1 = \{x = y = 0\}$ in $L_2 = \{y = z = 0\}$. Kot med L_1 in L_2 je $\frac{\pi}{2}$ in $\tau(L_1) = L_1$ in $\tau(L_2) = \{y = z, x = 0\}$, ki oklepata kot $\frac{\pi}{4}$.

[**N**] Naj bo $\mathcal{S}$ stožnica v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$. Polara poljubne točke $P \in \mathcal{P}\mathbb{R}^3$ glede na $\mathcal{S}$ seka $\mathcal{S}$ vsaj v eni točki.

Glej primer z vaj: stožnica z enačbo $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ in polara točke $[-1 : 0 : 2]$ sta disjunktni.

[**N**] Naj bosta p in q različni premici v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$. Naj bosta A_1, A_2 različni točki na p in B_1 ter B_2 različni točki na q. Vedno obstaja perspektivnost iz p v q, ki slika A_i v B_i, $i = 1, 2$.

Če je npr A_1 presečišče p in q, B_1 pa ne, tedaj takšna perspektivnost ne obstaja.

[**P**] Na vsaki premici v $\mathcal{P}\mathbb{Z}_3^3$ obstajajo štiri točke, ki tvorijo harmonično četverko.

Seveda, če so A, B, C, D (edine) 4 točke na (poljubni) premici v $\mathcal{P}\mathbb{Z}_3^3$, tedaj je $\mathcal{D}(A, B, C, D) = 2 = -1$.