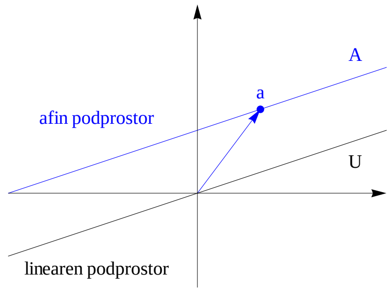
Afina in projektivna geometrija

Afina geometrija v $\mathbb{R}^n$

Afini podprostori v $\mathbb{R}^n$ so posplošitve pojmov premice in ravnine v $\mathbb{R}^3$. Množica $\mathcal{A}$ je afin podprostor v $\mathbb{R}^n$ dimenzije k, če jo lahko zapišemo v obliki

$$\mathcal{A} = a + U,$$

kjer je $a \in \mathcal{A}$ poljubna točka, $U \subset \mathbb{R}^n$ pa linearen podprostor dimenzije k. Točka a je analog začetne točke na premici, prostor U pa lahko razumemo kot množico smeri na $\mathcal{A}$.



V nadaljevanju bomo spoznali, kako lahko na različne načine opišemo afine podprostore in kako definiramo pojem vzporednosti afinih podprostorov v $\mathbb{R}^n$.

(1) (a) Pokaži, da točke $T_0(-1,1,2)$, $T_1(2,3,5)$ in $T(-4,-1,-1)$ ležijo na isti premici ter določi relativno lego točke T glede na T_0 in T_1.

(b) V ravnini $3x + 2y + z = 7$ ležijo točke $T_0(1,1,2)$, $T_1(3,-1,0)$, $T_2(0,3,1)$, $A(2,0,1)$ in $B(0,4,-1)$. Določi lego točk A in B glede na trikotnik $T_0T_1T_2$.

(c) Ugotovi, ali točka $T(0,1,0)$ leži znotraj piramide z oglišči $T_0(-1,1,-1)$, $T_1(1,2,0)$, $T_2(1,3,1)$ in $T_3(2,1,0)$.

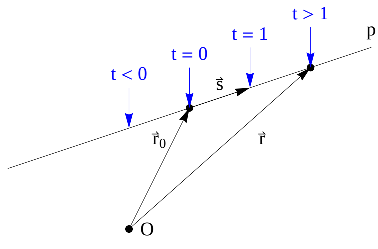
Rešitev: (a) Začeli bomo z opisom premice v $\mathbb{R}^3$. Opišemo jo lahko v parametrični ali pa v normalni obliki.

Parametrična oblika:

V parametrični obliki lahko točke na premici podamo v obliki

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s},$$

kjer je $\vec{r}_0$ začetna točka, $\vec{s}$ pa smerni vektor. Parameter t določa lego točke na premici.



Ekvivalentno nam parametrizacijo premice določata tudi dve točki T_0 in T_1, ki ležita na njej. Vsaka točka T na premici je potem oblike

$$T = \lambda_0 T_0 + \lambda_1 T_1$$

za neki realni števili λ_0 in λ_1, ki zadoščata pogoju $\lambda_0 + \lambda_1 = 0$. Kakor hitro poznamo vrednost λ_1, je λ_0 s tem pogojem enolično določena. Zato lahko premico parametriziramo s parametrom λ_1, ki ga imenujemo afina koordinata točke T glede na afino bazo $\{T_0, T_1\}$. Med obema parametrizacijama velja zveza:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= T_0, \\ \vec{s} &= \overrightarrow{T_0T_1}, \\ t &= \lambda_1. \end{aligned}$$

<u>Normalna oblika</u>:

Premico v $\mathbb{R}^3$ lahko podamo tudi kot rešitev sistema dveh neodvisnih enačb:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2. \end{aligned}$$

Geometrično to ustreza preseku dveh nevzporednih ravnin v $\mathbb{R}^3$.

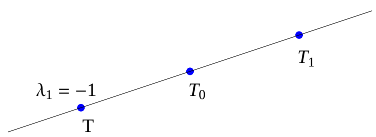
V našem primeru sta vektorja $\overrightarrow{T_0T} = (-3, -2, -3)$ in $\overrightarrow{T_1T} = (-6, -4, -6)$ vzporedna, zato so točke T_0, T_1 in T kolinearne. To pomeni, da lahko točko T izrazimo kot afino kombinacijo točk T_0 in T_1 oziroma

$$T = \lambda_0 T_0 + \lambda_1 T_1 = T_0 + \lambda_1 \overrightarrow{T_0T_1},$$

kjer je $\overrightarrow{T_0T_1} = (3, 2, 3)$. Po komponentah tako pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned} -4 &= -1 + 3\lambda_1, \\ -1 &= 1 + 2\lambda_1, \\ -1 &= 2 + 3\lambda_1, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $\lambda_1 = -1$. Afina koordinata $\lambda_1 = -1$ nam pove, da pridemo do točke T tako, da začnemo v T_0 in se nato premaknemo po premici za vektor $-\overrightarrow{T_0T_1}$.



(b) Sedaj se posvetimo opisom ravnine v $\mathbb{R}^3$.

<u>Parametrična oblika</u>:

Ravnino lahko podamo v obliki

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2,$$

kjer je $\vec{r}_0$ začetna točka in $\vec{s}_1$ ter $\vec{s}_2$ smerna vektorja. Če je ravnina definirana s tremi nekolinearnimi točkami T_0, T_1 in T_2, lahko poljubno točko te ravnine izrazimo v obliki

$$T = \lambda_0 T_0 + \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2,$$

kjer je $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Podobno kot pri premici imenujemo par (λ_1, λ_2) afini koordinati točke T glede na afino bazo $\{T_0, T_1, T_2\}$. Zveza med opisoma je tokrat:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_0 &= T_0,\\
\vec{s}_i &= \overrightarrow{T_0 T_i},\\
t_i &= \lambda_i
\end{aligned}$$

za $i = 1, 2$.

<u>Normalna oblika</u>:

Ravnina v $\mathbb{R}^3$ je določena tudi z enačbo

$$ax + by + cz = d.$$

V našem primeru je ravnina določena z enačbo $3x+2y+z = 7$. Za začetno točko vzemimo $T_0(1, 1, 2)$, za smerna vektorja pa:

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= \overrightarrow{T_0 T_1} = (2, -2, -2),\\
\vec{s}_2 &= \overrightarrow{T_0 T_2} = (-1, 2, -1).
\end{aligned}$$

Najprej izračunajmo afini koordinati točke A glede na afino bazo $\{T_0, T_1, T_2\}$. Določeni sta s sistemom enačb

$$(2, 0, 1) = (1, 1, 2) + \lambda_1(2, -2, -2) + \lambda_2(-1, 2, -1)$$

oziroma po komponentah:

$$\begin{aligned}
2 &= 1 + 2\lambda_1 - \lambda_2,\\
0 &= 1 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2,\\
1 &= 2 - 2\lambda_1 - \lambda_2,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ in $\lambda_2 = 0$. Od tod sledi, da je točka A središče stranice T_0T_1.

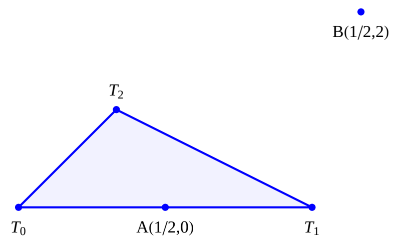
Afini koordinati točke B glede na afino bazo $\{T_0, T_1, T_2\}$ sta določeni s sistemom enačb

$$(0, 4, -1) = (1, 1, 2) + \lambda_1(2, -2, -2) + \lambda_2(-1, 2, -1).$$

oziroma:

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + 2\lambda_1 - \lambda_2,\\
4 &= 1 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2,\\
-1 &= 2 - 2\lambda_1 - \lambda_2.
\end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ in $\lambda_2 = 2$. Ker je $\lambda_2 = 2 > 1$, leži točka B izven trikotnika $T_0T_1T_2$.



(c) Točke T_0, T_1, T_2 in T_3 so afino neodvisne, zato tvorijo afino bazo $\mathbb{R}^3$. Torej lahko točko T izrazimo kot afino kombinacijo teh točk. Če označimo:

$$\begin{aligned}\vec{s}_1 &= \overrightarrow{T_0T_1} = (2,1,1),\\ \vec{s}_2 &= \overrightarrow{T_0T_2} = (2,2,2),\\ \vec{s}_3 &= \overrightarrow{T_0T_3} = (3,0,1),\end{aligned}$$

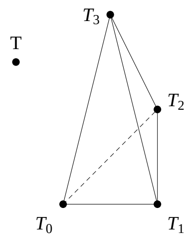
morajo obstajati parametri λ_1, λ_2 in λ_3, da velja

$$(0,1,0) = (-1,1,-1) + \lambda_1(2,1,1) + \lambda_2(2,2,2) + \lambda_3(3,0,1).$$

Točka T leži v notranjosti piramide natanko takrat, ko so njene afine koordinate (vključno z λ_0) pozitivne. Če upoštevamo kartezične koordinate točk, pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned}0 &= -1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3,\\ 1 &= 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2,\\ 0 &= -1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $\lambda_0 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = -2$. To pomeni, da točka T ne leži v notranjosti piramide.



$\square$

(2) Zapiši dani afini ravnini v parametrični obliki $\mathcal{A} = a + U$ in pa v normalni obliki:

(a) ravnine v $\mathbb{R}^3$ skozi točke $T_0(1,2,3)$, $T_1(2,0,3)$ in $T_2(2,-1,2)$,

(b) ravnine v $\mathbb{R}^4$ skozi točke $T_0(1,0,1,0)$, $T_1(0,1,1,1)$ in $T_2(1,1,0,0)$.

Rešitev: (a) Za smerna vektorja ravnine lahko vzamemo:

$$\begin{aligned}\vec{s}_1 &= \overrightarrow{T_0T_1} = (1,-2,0),\\ \vec{s}_2 &= \overrightarrow{T_0T_2} = (1,-3,-1).\end{aligned}$$

Od tod sledi, da velja $\mathcal{A} = a + U$, kjer je:

$$\begin{aligned} a &= (1, 2, 3), \\ U &= \text{Lin}\{(1, -2, 0), (1, -3, -1)\}. \end{aligned}$$

Če hočemo ravnino opisati v normalni obliki, moramo poiskati smer normale. Pomagamo si lahko z vektorskim produktom

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (1, -2, 0) \times (1, -3, -1) = (2, 1, -1).$$

Dano ravnino lahko torej podamo z enačbo

$$2x + y - z = d,$$

kjer vrednost d dobimo tako, da vstavimo kartezične koordinate ene izmed točk T_i v to enačbo. Sledi $d = 1$, zato je enačba ravnine skozi dane točke

$$2x + y - z = 1.$$

(b) Sedaj imamo ravnino v $\mathbb{R}^4$. Opišemo jo lahko v parametrični obliki z dvema parametroma ali pa v normalni obliki s sistemom dveh linearno neodvisnih enačb. Za smerna vektorja vzemimo:

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= \overrightarrow{T_0T_1} = (-1, 1, 0, 1), \\ \vec{s}_2 &= \overrightarrow{T_0T_2} = (0, 1, -1, 0). \end{aligned}$$

Torej velja $\mathcal{A} = a + U$, kjer je:

$$\begin{aligned} a &= (1, 0, 1, 0), \\ U &= \text{Lin}\{(-1, 1, 0, 1), (0, 1, -1, 0)\}. \end{aligned}$$

Ker smo sedaj v štirih dimenzijah, smer normale ni enolično določena. Zadoščati mora pogojema $\vec{n} \cdot \vec{s}_1 = 0$ in $\vec{n} \cdot \vec{s}_2 = 0$. Če pišemo $\vec{n} = (a, b, c, d)$, nam ta dva pogoja dasta sistem enačb:

$$\begin{aligned} -a + b + d &= 0, \\ b - c &= 0. \end{aligned}$$

Vektorji, ki zadoščajo temu sistemu, tvorijo dvodimenzionalni podprostor $\mathbb{R}^4$, ki se ujema s prostorom $U^\perp$. Ker imamo štiri neznanke in samo dve enačbi, si lahko poljubno izberemo dva parametra, recimo c in d. Vrednosti a in b sta nato natanko določeni. Če izberemo $c = 1$ in $d = 0$, sledi $a = b = 1$, zato definirajmo $\vec{n}_1 = (1, 1, 1, 0)$. Pri izbiri $c = 0$ in $d = 1$ pa dobimo $a = 1$ in $b = 0$ ter $\vec{n}_2 = (1, 0, 0, 1)$. Če koordinate na $\mathbb{R}^4$ označimo z (x, y, z, w), lahko dano ravnino opišemo s sistemom enačb:

$$\begin{aligned} x + w &= e, \\ x + y + z &= f. \end{aligned}$$

Vrednosti e in f spet dobimo tako, da vstavimo kartezične koordinate ene izmed točk T_i v obe enačbi. Tako dobimo $e = 1$ in $f = 2$, sistem enačb, ki določa našo ravnino, pa je:

$$\begin{aligned} x + w &= 1, \\ x + y + z &= 2. \end{aligned}$$

<u>Opomba</u>: Naj bo $\mathcal{A}$ afin podprostor dimenzije k v $\mathbb{R}^n$. Potem ga lahko opišemo v parametrični obliki s k parametri ali pa v normalni obliki s sistemom $n - k$ linearno neodvisnih enačb. $\square$

(3) Ugotovi, ali so dani afini prostori vzporedni:

(a) premica $\vec{r} = (1,0,0) + t(1,-1,0)$ in ravnina $x + y - z = 3$ v $\mathbb{R}^3$,

(b) ravnina skozi točke $T_0(1,0,0,0)$, $T_1(2,0,2,1)$ in $T_2(1,1,1,0)$ in premica, določena s sistemom enačb $x - w = 0$, $x - y + z = 1$ in $x + y - 2w = 2$ v $\mathbb{R}^4$.

Rešitev: Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ afina podprostora v $\mathbb{R}^n$ in naj velja:

$$\mathcal{A} = a + U,$$
$$\mathcal{A}' = a' + U'.$$

Potem rečemo, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ vzporedna, če je $U \subset U'$ ali pa $U' \subset U$. Če imata $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ isto dimenzijo, sta vzporedna natanko takrat, ko je $U = U'$. V primeru dveh premic to pomeni, da imata vzporedna smerna vektorja.

V praksi lahko vzporednost afinih podprostorov preverimo na naslednja načina. Denimo, da je $\dim(\mathcal{A}) \leq \dim(\mathcal{A}')$. Potem sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ vzporedna natanko takrat, ko lahko vsak smerni vektor $\mathcal{A}$ zapišemo kot linearno kombinacijo smernih vektorjev $\mathcal{A}'$. Če imamo $\mathcal{A}'$ podan v normalni obliki, pa je dovolj preveriti, da je vsak smerni vektor $\mathcal{A}$ pravokoten na vse normalne vektorje $\mathcal{A}'$.

(a) Imamo premico s smernim vektorjem $\vec{s} = (1,-1,0)$ in ravnino z normalo $\vec{n} = (1,1,-1)$. Ker je $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$, sta dana premica in ravnina vzporedni.

(b) Sedaj imamo premico in ravnino v $\mathbb{R}^4$. Premica je določena s tremi neodvisnimi enačbami z normalami $\vec{n}_1 = (1,0,0,-1)$, $\vec{n}_2 = (1,-1,1,0)$ in $\vec{n}_3 = (1,1,0,-2)$. Smerni vektor premice je pravokoten na vse tri normale, zato njegove komponente zadoščajo sistemu enačb:

$$x - w = 0,$$
$$x - y + z = 0,$$
$$x + y - 2w = 0.$$

Ta sistem enačb reši na primer vektor $\vec{s} = (1,1,0,1)$. Ravnina ima po drugi strani smerna vektorja:

$$\vec{s}_1 = \overrightarrow{T_0T_1} = (1,0,2,1),$$
$$\vec{s}_2 = \overrightarrow{T_0T_2} = (0,1,1,0).$$

Premica in ravnina sta vzporedni natanko takrat, ko je smerni vektor premice linearna kombinacija smernih vektorjev ravnine. Pa denimo, da obstajata realni števili α_1 in α_2, da velja

$$(1,1,0,1) = \alpha_1(1,0,2,1) + \alpha_2(0,1,1,0).$$

Po komponentah dobimo sistem enačb:

$$1 = \alpha_1,$$
$$1 = \alpha_2,$$
$$0 = 2\alpha_1 + \alpha_2,$$
$$1 = \alpha_1,$$

ki pa ni rešljiv. Od tod sledi, da premica in ravnina nista vzporedni. $\square$