Afina in projektivna geometrija

Aksiomatsko definirana afina ravnina

(1) Ugotovi, ali naslednja para zadoščata aksiomom aksiomatsko definirane afine ravnine:

(a) $\mathcal{A} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathcal{A}_1 = \{\{(x, y) \in \mathcal{A} \,|\, ax + by + c = 0\},\ a, b, c \in \mathbb{Z}\} \setminus \emptyset$,

(b) $\mathcal{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \{\{(x, y) \in \mathcal{A} \,|\, ax + by + c = 0\},\ a, b, c \in \mathbb{R}\} \setminus \emptyset$.

Rešitev: Denimo, da imamo par množic $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$, kjer je $\mathcal{A}_1 \subset 2^{\mathcal{A}}$. Elemente v $\mathcal{A}$ bomo interpretirali kot točke, elemente v $\mathcal{A}_1$ pa kot premice. Par $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ sestavlja aksiomatsko definirano afino ravnino, če zadošča aksiomom:

$A1$ Skozi različni točki poteka natanko ena premica.

$A2$ Za vsako točko $X \in \mathcal{A}$ in vsako premico $p \in \mathcal{A}_1$ obstaja natanko ena premica, ki gre skozi X in je vzporedna p.

$A3$ Obstajajo 3 nekolinearne točke.

(a) Najprej si bomo pogledali celoštevilsko mrežo $\mathcal{A}$ v evklidski ravnini. Premice v $\mathcal{A}_1$ ustrezajo premicam v $\mathbb{R}^2$ s celoštevilskimi smernimi vektorji.

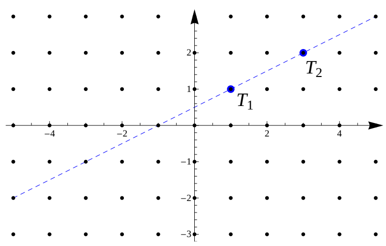
Pokazali bomo, da par $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ ustreza aksiomu $A1$. V ta namen izberimo poljubni točki $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{A}$. Če je $x_1 = x_2 = m$, je

$$p :\ x - m = 0$$

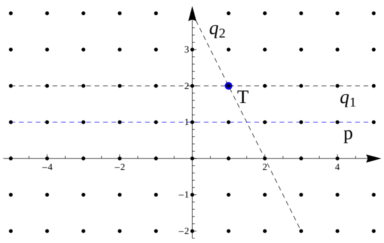
edina premica, ki poteka skozi točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2). Naj bo sedaj $x_1 \neq x_2$. Pokazali bomo, da lahko evklidsko premico, ki poteka skozi dani točki, zapišemo v predpisani obliki. Računajmo:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \\ (y - y_1)(x_2 - x_1) &= (y_2 - y_1)(x - x_1), \\ 0 &= (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2 y_1 - x_1 y_2). \end{aligned}$$

Ker so x_1, x_2, y_1 in y_2 cela števila, so tudi $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$ in $x_2 y_1 - x_1 y_2$ cela števila, kar smo želeli pokazati.



Pokažimo sedaj, da aksiom $A2$ ni izpolnjen v tem modelu. Izberimo na primer premico $p :\ y - 1 = 0$ in točko $(1, 2)$. Premici $q_1 :\ y - 2 = 0$ in $q_2 :\ 2x + y - 4 = 0$ potem obe vsebujeta točko $(1, 2)$, a ne sekata premice p.



(b) V tem primeru je par $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ običajna evklidska ravnina, ki zadošča vsem trem aksiomom. $\square$

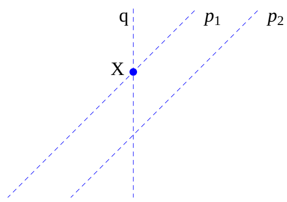
(2) Dokaži, da v vsaki končni aksiomatsko definirani afini ravnini veljajo naslednje trditve:

(a) za poljubni vzporedni premici p_1 in p_2 ter poljubno premico q velja, da q seka p_1 natanko takrat, ko q seka p_2,

(b) na vsaki premici ležita vsaj dve točki,

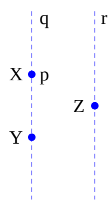
(c) vse premice imajo enako število točk.

Rešitev: (a) Denimo, da premica q seka premico p_1 v točki X. Če q ne bi sekala premice p_2, bi skozi točko X potekali premici q in p_1, ki bi bili obe vzporedni premici p_2. To pa je v protislovju z aksiomom $A2$.



Od tod sledi, da je vzporednost premic ekvivalenčna relacija na množici premic.

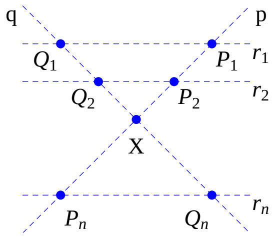
(b) Sedaj bomo pokazali, da na vsaki premici ležita vsaj dve točki. Recimo, da obstaja premica p, ki vsebuje samo točko X. Po aksiomu $A3$ obstajata še vsaj dve točki Y in Z, da so X, Y in Z nekolinearne. Označimo s q premico skozi X in Y, ki obstaja po aksiomu $A1$. Po aksiomu $A2$ lahko sedaj najdemo vzporednico r premice q, ki gre skozi Z. Ta premica r ne vsebuje točke X, zato je vzporedna tudi premici p. To pa pomeni, da skozi X potekata dve vzporednici p in q premice r, kar pa je v protislovju z aksiomom $A2$.



(c) V afini ravnini $\mathbb{F}_p^2$ leži na vsaki premici p točk. V nadaljevanju bomo pokazali, da imajo v poljubni končni aksiomatsko definirani afini ravnini vse premice enako število točk.

Za začetek bomo obravnavali primer, ko se premici p in q sekata v točki X. Če imata p in q enako število točk, ni kaj dokazovati, zato lahko predpostavimo, da ima premica p vsaj toliko točk kot q. Ker vsebuje vsaka premica vsaj dve točki, lahko najdemo točko $Q_1 \in q$, različno od X. Premica p pa naj poleg X vsebuje še točke $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Označimo z r_1 premico, ki poteka skozi P_1 in Q_1, ter z r_k vzporednice premice r_1 skozi točke P_k

za $k = 2, 3, \dots, n$. Ker so premice $\{r_2, r_3, \dots, r_k\}$ vzporedne r_1, vsaka izmed njih seka premico q v točkah $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$. Ker pa so te premice paroma vzporedne, so vse te točke različne. To pa pomeni, da ima q vsaj toliko točk kot p. Torej imata p in q enako število točk.



Če p in q nista vzporedni, lahko najdemo premico r, ki seka tako p kot q. Potem imata p in q enako točk kot r. $\square$

(3) Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina reda n. Dokaži:

(a) afina ravnina $\mathcal{A}$ vsebuje n^2 točk,

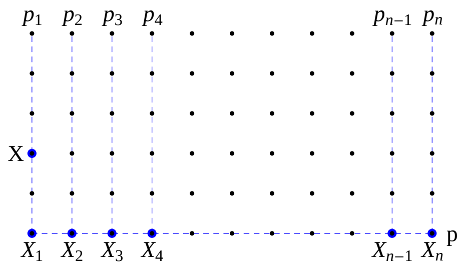
(b) skozi vsako točko $X \in \mathcal{A}$ poteka $n+1$ premic,

(c) afina ravnina $\mathcal{A}$ vsebuje $n^2 + n$ premic.

Rešitev: Aksiomatsko definirana ravnina $\mathcal{A}$ je reda n, če na vsaki premici leži n točk.

(a) Najprej pokažimo, da aksiomatsko definirana afina ravnina $\mathcal{A}$ reda n vsebuje n^2 točk.

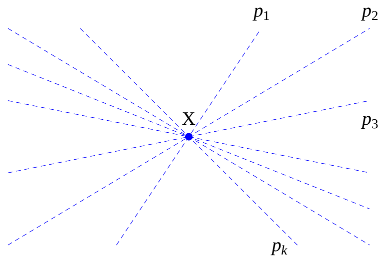
Izberimo poljubno premico p v $\mathcal{A}$ in označimo točke na njej z $X_1, X_2, \dots, X_n$. Po aksiomu $A3$ obstaja točka $X \in \mathcal{A}$, ki ne leži na p. Nadalje lahko po aksiomu $A1$ najdemo enolično določeno premico p_1, ki poteka skozi točki X in X_1. Ker $X \notin p$, se premici p in p_1 sekata samo v točki X_1. Z uporabo aksioma $A2$ lahko sedaj najdemo vzporednice $p_2, p_3, \dots, p_n$ premice p, ki potekajo skozi točke $X_2, X_3, \dots, X_n$.



V ravnini $\mathcal{A}$ imamo torej n vzporednic, od katerih vsaka vsebuje po n točk. Zato ravnina $\mathcal{A}$ vsebuje vsaj n^2 točk. Pokazati moramo še, da drugih točk ni. Pa denimo, da obstaja točka $Y \in \mathcal{A}$, ki ne leži na nobeni izmed premic p_i. Po aksiomu $A2$ lahko najdemo premico q, ki vsebuje Y in je vzporedna premici p_1. Tako dobljena premica q bi potem morala sekati premico p in bi zato sovpadala z eno izmed premic p_i. To pa je v nasprotju s predpostavko.

(b) Dokažimo sedaj, da skozi vsako točko poteka $n+1$ premic.

Izberimo poljubno točko $X \in \mathcal{A}$ in označimo s $p_1, p_2, \dots, p_k$ premice, ki potekajo skozi točko X. Poljubni dve izmed teh premic se sekata natanko v točki x, njihova unija pa je cela ravnina $\mathcal{A}$. Oboje sledi iz aksioma $A1$.



Imamo torej k premic, ki vsebujejo po n točk. Če seštejemo te točke in upoštevamo, da smo točko X šteli k-krat, dobimo enačbo:

$$\begin{aligned} kn-(k-1)&=n^2,\\ k(n-1)&=n^2-1,\\ k&=n+1. \end{aligned}$$

Torej skozi točko X poteka $n+1$ premic.

(c) Pokazali smo že, da v ravnini $\mathcal{A}$ leži n^2 točk in da gre skozi vsako točko $n+1$ premic. Ker leži na vsaki premici n točk, je vseh premic

$$\frac{n^2(n+1)}{n}=n^2+n.$$

□

(4) Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina s točkami $\mathcal{A}=\{1,2,3,\ldots,15,16\}$ ter premicami:

$$\begin{aligned} &\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{9,10,11,12\},\{13,14,15,16\},\\ &\{1,5,9,13\},\{2,6,10,14\},\{3,7,11,15\},\{4,8,12,16\},\\ &\{1,6,11,16\},\{2,5,12,15\},\{3,8,9,14\},\{4,7,10,13\},\\ &\{1,8,10,15\},\{2,7,9,16\},\{3,6,12,13\},\{4,5,11,14\},\\ &\{1,7,12,14\},\{2,8,11,13\},\{3,5,10,16\},\{4,6,9,15\}. \end{aligned}$$

Ali obstaja obseg $\mathcal{O}$, da je ravnina $\mathcal{A}$ izomorfna afini ravnini $\mathcal{O}^2$?

Rešitev: Afina ravnina $\mathcal{A}$ je reda 4. Vsega skupaj ima 16 točk in 20 premic. Premice v vsaki vrstici so paroma vzporedne.

Če bi obstajal obseg $\mathcal{O}$, da bi veljalo $\mathcal{A}\cong\mathcal{O}^2$, bi moral imeti štiri točke. Do izomorfizma natančno obstaja en sam tak obseg, ki mu rečemo Galoisov obseg s štirimi točkami in ga označimo z

$$\mathrm{GF}(2^2)=\{0,1,x,1+x\}.$$

Elementi tega obsega so linearni polinomi s koeficienti v obsegu $\mathbb{F}_2$, operaciji seštevanja in množenja pa lahko predstavimo s tabelama:

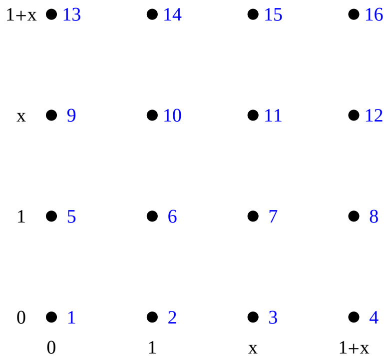
$+$	0	1	x	$1+x$
0	0	1	x	$1+x$
1	1	0	$1+x$	x
x	x	$1+x$	0	1
$1+x$	$1+x$	x	1	0

$\cdot$	0	1	x	$1+x$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$1+x$
x	0	x	$1+x$	1
$1+x$	0	$1+x$	1	x

.

Množica vseh elementov obsega $\mathrm{GF}(2^2)$ tvori grupo za seštevanje, ki je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, grupa obrnljivih elementov obsega $\mathrm{GF}(2^2)$ pa je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_3$.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je afina ravnina $\mathcal{A}$ izomorfna ravnini $\mathrm{GF}(2^2)^2$. Bijekcijo na nivoju točk lahko ponazorimo s spodnjo sliko.



V afini ravnini $\mathrm{GF}(2^2)^2$ poteka skozi izhodišče pet premic. Vsaka izmed teh premic ima še tri vzporednice, ki ustrezajo vzporednicam v afini ravnini $\mathcal{A}$.

- Premica p_1 ima smerni vektor $\vec{s}_1 = (1, 0)$, na njej pa ležijo točke
$$\{(0,0),(1,0),(x,0),(1+x,0)\} \longleftrightarrow \{1,2,3,4\}.$$
Vzporednice premice p_1 v $\mathrm{GF}(2^2)^2$ ustrezajo vzporednicam premice $\{1,2,3,4\}$ v $\mathcal{A}$.
- Premica p_2 ima smerni vektor $\vec{s}_2 = (0, 1)$, na njej pa ležijo točke
$$\{(0,0),(0,1),(0,x),(0,1+x)\} \longleftrightarrow \{1,5,9,13\}.$$
- Premica p_3 ima smerni vektor $\vec{s}_3 = (1, 1)$, na njej pa ležijo točke
$$\{(0,0),(1,1),(x,x),(1+x,1+x)\} \longleftrightarrow \{1,6,11,16\}.$$
- Premica p_4 ima smerni vektor $\vec{s}_4 = (1, x)$, na njej pa ležijo točke
$$\{(0,0),(1,x),(x,1+x),(1+x,1)\} \longleftrightarrow \{1,8,10,15\}.$$
- Premica p_5 ima smerni vektor $\vec{s}_5 = (1, 1+x)$, na njej pa ležijo točke
$$\{(0,0),(1,1+x),(x,1),(1+x,x)\} \longleftrightarrow \{1,7,12,14\}.$$

$\square$