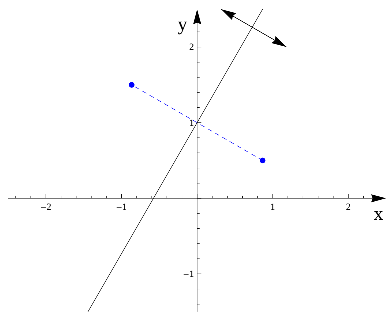
1. sklop dodatnih vaj iz Afine in projektivne geometrije

(1) Zapiši predpis za zrcaljenje čez premico $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ v evklidski ravnini.

Rešitev: $\tau(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$



(2) Geometrično opiši naslednji izometriji evklidske ravnine:

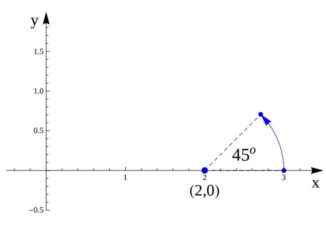
(a) $\tau(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix},$

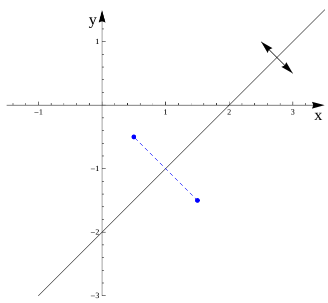
(b) $\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$

Rešitev:

(a) Rotacija za kot $\phi = 45°$ okoli točke $(2,0)$,

(b) Zrcaljenje čez premico $y = x - 2$.





(3) Poišči vse izometrije $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki zadoščajo pogoju $\tau^2 = \mathrm{Id}$.

Rešitev: Preslikava τ je lahko identiteta, zrcaljenje čez premico ali pa rotacija za kot $\phi = 180°$ okoli neke točke.

(4) Pokaži, da je vsaka izometrija evklidske ravnine oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{b},$$

kjer je Q ortogonalna matrika velikosti 2×2 in $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ nek vektor.

(5) Pokaži, da lahko vsako izometrijo evklidske ravnine zapišemo kot kompozitum največ treh zrcaljenj.

(6) Geometrično opiši izometrijo evklidskega prostora, ki je določena z matriko

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Zrcaljenje čez ravnino $x - y - z = 0$.

(7) Zapiši rotacijsko matriko, ki predstavlja rotacijo za kot $\phi = 60^\circ$ okoli premice s smernim vektorjem $\vec{s} = (1, 1, 1)$.

Rešitev: $Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$

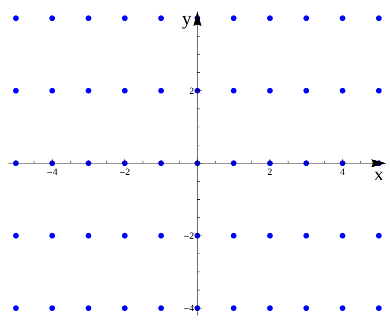
(8) Poišči vse izometrije evklidske ravnine, ki ohranjajo pravokotno mrežo

$$L = \{(m, 2n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Rešitev: Vsaka izometrija mreže L je oblike

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 2l \end{bmatrix},$$

kjer sta k in l celi števili.



(9) Pokaži, da je $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ afin podprostor dimenzije k natanko takrat, ko obstaja surjektivna linearna preslikava $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ in $c \in \mathbb{R}^{n-k}$, da je $\mathcal{A} = A^{-1}(c)$.

(10) Naj bo $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ afin podprostor dimenzije $n-1$ in $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ premica, ki ni vzporedna $\mathcal{A}$. Pokaži, da se potem $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sekata v natanko eni točki.

(11) Množica $\mathbb{F} = \{0, 1, x, 1+x\}$ je opremljena z operacijama:

$+$	0	1	x	$1+x$
0	0	1	x	$1+x$
1	1	0	$1+x$	x
x	x	$1+x$	0	1
$1+x$	$1+x$	x	1	0

$\cdot$	0	1	x	$1+x$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$1+x$
x	0	x	$1+x$	1
$1+x$	0	$1+x$	1	x

(a) Pokaži, da je $\mathbb{F}$ obseg in poišči vse njegove avtomorfizme.

(b) Koliko premic vsebuje afina ravnina $\mathbb{F}^2$?

Rešitev:

(a) Avtomorfizma obsega $\mathbb{F}$ sta dva. Poleg identične preslikave je avtomorfizem še preslikava, ki elementa 0 in 1 fiksira, elementa x in $1+x$ pa zamenja.

(b) Vseh premic v afini ravnini $\mathbb{F}^2$ je 20.

(12) Poišči afino transformacijo afine ravnine $\mathbb{F}_5^2$, ki preslika točko $(0,0)$ v $(1,1)$, točko $(1,0)$ v $(2,2)$, točko $(0,1)$ pa v $(0,2)$.

Rešitev: Iskana afina transformacija ima predpis

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(13) Dana je preslikava $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ s predpisom

$$(Fp)(x) = \frac{6}{x} \int_0^x p(t)\, dt + p(1)x + x^2$$

za poljuben $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

(a) Zapiši predpis za preslikavo F v koordinatah na $\mathbb{R}_2[x]$, ki jih določa baza $\{x^2, x, 1\}$ in pokaži, da je F afina transformacija.

(b) Zapiši predpis za preslikavo F^{-1}.

(c) Dana je množica $\mathcal{A} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \,|\, p(-1) = p(1)\}$. Pokaži, da je množica $F(\mathcal{A})$ afin podprostor $\mathbb{R}_2$ in ga zapiši v obliki $F(\mathcal{A}) = a + U$, kjer je $a \in \mathbb{R}_2[x]$ in $U \subset \mathbb{R}_2[x]$ nek linearni podprostor.

Rešitev: Uporabili bomo identifikacijo $ax^2 + bx + c \longleftrightarrow (a, b, c)$.

(a) $F(a, b, c) = (2a + 1, a + 4b + c, 6c)$,

(b) $F^{-1}(a, b, c) = \frac{1}{24}\,(12a - 12, -3a + 6b - c + 3, 4c)$,

(c) $F(\mathcal{A}) = a + U$, kjer je $a = x^2$ in $U = \mathrm{Lin}\{2x^2 + x, x + 6\}$.

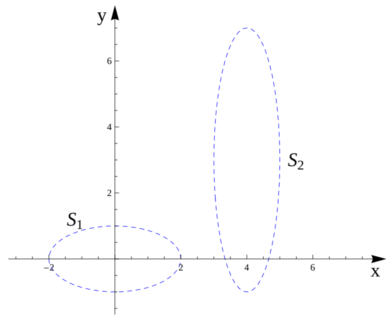
(14) V evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ sta dani elipsi:

$$\mathcal{S}_1 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$
$$\mathcal{S}_2 : (x-4)^2 + \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$$

Poišči afino transformacijo $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki elipso $\mathcal{S}_1$ preslika na elipso $\mathcal{S}_2$.

Rešitev: Takšnih afinih transformacij je več. Ena izmed njih je

$$\tau(x,y) = (-y+4, 2x+3).$$



(15) V afini ravnini $\mathbb{F}_5^2$ sta dani premici:

$$p : \{\alpha(1,0) \mid \alpha \in \mathbb{F}_5\},$$
$$q : \{\alpha(0,1) \mid \alpha \in \mathbb{F}_5\}.$$

(a) Koliko je afinih transformacij $\tau : \mathbb{F}_5^2 \to \mathbb{F}_5^2$, ki preslikajo premico p na premico q, premico q pa na premico p?

(b) Ali je afina transformacija, ki zadošča zgornjemu pogoju, natanko določena, če velja še $\tau(1,1) = (2,1)$? Če je, zapiši njen predpis.

Rešitev:

(a) Iz predpostavke sledi, da je $\tau(0,0) = (0,0)$, kar pomeni, da je preslikava τ linearna. Hkrati mora biti oblike

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

za neka $b, c \in \mathbb{F}_5 \setminus \{0\}$. Vseh takih afinih transformacij je 16.

(b) Z dodatnim pogojem je preslikava τ natanko določena in velja

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$