2. sklop dodatnih vaj iz Afine in projektivne geometrije

---

(1) Naj bo $\mathcal{P}$ aksiomatsko definirana projektivna ravnina in p poljubna premica v $\mathcal{P}$. Pokaži, da potem množica $\mathcal{A} = \mathcal{P} \setminus p$ zadošča aksiomom aksiomatsko definirane afine ravnine.

(2) Fanova ravnina je končna projektivna ravnina $P(\mathbb{F}_2^3)$.

  (a) Koliko je vseh projektivnosti $\theta : P(\mathbb{F}_2^3) \to P(\mathbb{F}_2^3)$?

  (b) Koliko je projektivnosti $\theta : P(\mathbb{F}_2^3) \to P(\mathbb{F}_2^3)$, za katere sta $[1 : 0 : 0]$ in $[0 : 1 : 0]$ fiksni točki?

Rešitev:

(a) Vsaka projektivnost $\theta : P(\mathbb{F}_2^3) \to P(\mathbb{F}_2^3)$ je porojena z obrnljivo matriko $A : \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2^3$. Nad splošnim obsegom sicer linearno odvisne matrike porodijo isto projektivnost, ker pa ima $\mathbb{F}_2$ samo dva elementa, imamo v tem primeru bijektivno korespondenco med obrnljivimi matrikami in projektivnostmi. Torej je vseh projektivnosti 168.

(b) Takšne projektivnosti so 4. Porojene so z matrikami:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) Poišči projektivnost $\theta : P(\mathbb{R}^2) \to P(\mathbb{R}^2)$, ki zadošča pogojem:

$$\theta([1 : 0]) = [1 : 2],$$
$$\theta([0 : 1]) = [1 : 0],$$
$$\theta([1 : 1]) = [1 : 1].$$

Rešitev: $\theta([x : y]) = [x + y : 2x]$.

(4) Izračunaj predpis za projektivnost $\theta : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$, ki zadošča pogojem:

$$\theta([0 : 0 : 1]) = [0 : 1 : 1],$$
$$\theta([1 : 0 : 1]) = [1 : 1 : 2],$$
$$\theta([0 : 1 : 1]) = [1 : 2 : 2],$$
$$\theta([1 : 1 : 1]) = [2 : 2 : 3].$$

Rešitev: $\theta([x : y : z]) = [x + y : y + z : x + y + z]$.

(5) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani premici:

$$p = \{[x : y : z] \,|\, x + y + z = 0\},$$
$$q = \{[x : y : z] \,|\, -9x - 4y + 6z = 0\}.$$

Projektivnost $\theta : p \to q$ je določena s pogoji:

$$\theta([2 : 1 : -3]) = [2 : -3 : 1],$$
$$\theta([1 : 2 : -3]) = [2 : 3 : 5],$$
$$\theta([0 : 1 : -1]) = [0 : 6 : 4].$$

Izračunaj $\theta([-4 : 1 : 3])$.

Rešitev: $\theta([-4 : 1 : 3]) = [-2 : 6 : 1]$.

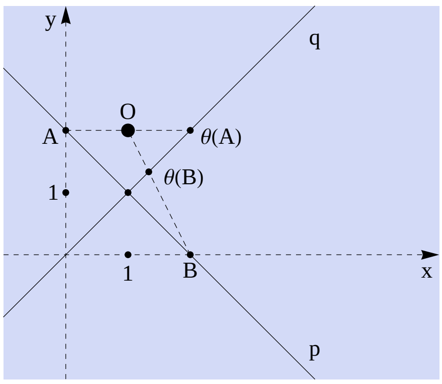
(6) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana točka $O = [1 : 2 : 1]$ in premici:

$$p = \{[x : y : z] \,|\, x + y - 2z = 0\},$$
$$q = \{[x : y : z] \,|\, x - y = 0\}.$$

Poišči predpis za perspektivnost $\theta : p \to q$ s centrom O.

Rešitev: Perspektivnost θ ima predpis

$$\theta([x : 2z - x : z]) = [3x - 2z : 3x - 2z : 2x - z].$$



(7) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ so dane točke $A = [0 : 1 : -1]$, $B = [1 : -1 : 0]$, $C = [1 : -2 : 1]$ in $D = [-4 : 1 : 3]$ ter premica

$$q = \{[x : y : z] \,|\, 3x + 2y - 6z = 0\}.$$

(a) Pokaži, da so točke A, B, C in D kolinearne in poišči enačbo premice p, ki jih vsebuje.

(b) Izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$.

(c) Projektivnost $\theta : p \to q$ zadošča $\theta(A) = [2 : 0 : 3]$, $\theta(B) = [0 : 3 : 2]$ in $\theta(C) = [2 : 3 : 5]$. Izračunaj $\theta(D)$.

Rešitev:

(a) Premica p ima enačbo $p = \{[x : y : z] \,|\, x + y + z = 0\}$.

(b) $\mathcal{D}(A, B, C, D) = -\frac{3}{4}$.

(c) $\theta(D) = [6 : -12 : 1]$.

(8) Konstruiraj vložitev afine ravnine $\mathbb{R}^2$ v projektivno ravnino $P(\mathbb{R}^3)$, pri kateri bo premica skozi točki $A = [1 : 1 : 0]$ in $B = [0 : 1 : 1]$ premica v neskončnosti.

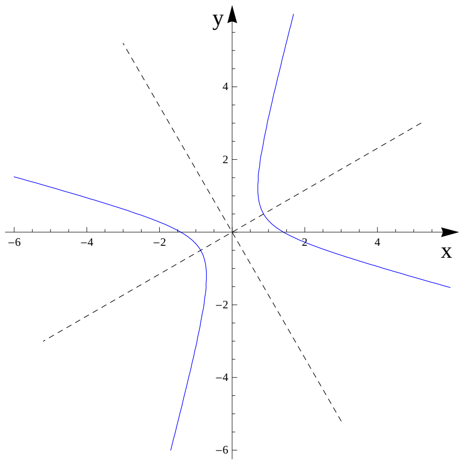
Rešitev: Ena takšna vložitev je preslikava $i : \mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R}^3)$, dana s predpisom

$$i(x, y) = [x : y : 1 - x + y].$$

(9) Skiciraj stožnico v evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$, ki je določena z enačbo

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2.$$

Rešitev: Dano stožnico dobimo z rotacijo hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ za kot $\phi = 30°$ v pozitivni smeri.



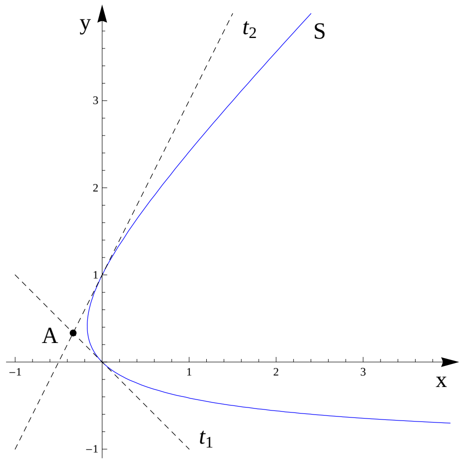
(10) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \,|\, y^2 - xy - xz - yz = 0\}.$$

Poišči tangenti na stožnico $\mathcal{S}$, ki potekata skozi točko $A = [1 : -1 : -3]$.

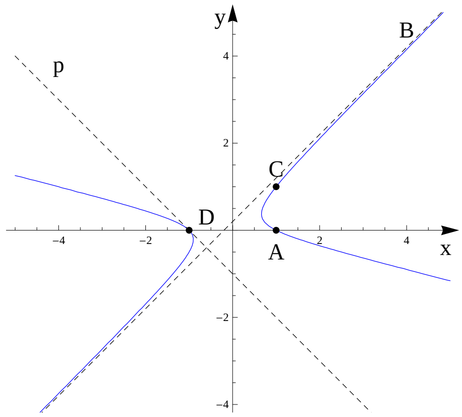
Rešitev:

$$t_1 = \{[x : y : z] \,|\, x + y = 0\},$$
$$t_2 = \{[x : y : z] \,|\, 2x - y + z = 0\}.$$



(11) Poišči enačbo stožnice $\mathcal{S}$ v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$, ki poteka skozi točke $A = [1:0:1]$, $B = [1:1:0]$, $C = [1:1:1]$ in $D = [1:0:-1]$ ter za katero je premica $p : \{[x:y:z] \,|\, x+y+z=0\}$ njena tangenta v točki D.

Rešitev: $\mathcal{S} = \{[x:y:z] \,|\, 2x^2 - 8y^2 - 2z^2 + 6xy + 2yz = 0\}$.



(12) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica

$$\mathcal{S} = \{[x:y:z] \,|\, x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2z^2 = 0\}.$$

(a) Poišči vse točke na stožnici $\mathcal{S}$, ki ležijo na premici v neskončnosti.

(b) Določi polaro točke $A = [0:0:1]$ glede na $\mathcal{S}$.

Rešitev:

(a) Na premici v neskončnosti ležita točki $T_\pm = [1 : \sqrt{3} \pm 2 : 0]$.

(b) Polara točke A je premica $p_A = \{[x:y:z] \,|\, z = 0\}$.

(13) Poišči vse izrojene stožnice v šopu stožnic, ki ga določata stožnici:

$$\mathcal{S}_1 = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xz = 0\},$$
$$\mathcal{S}_2 = \{[x : y : z] \,|\, -y^2 + 2xz = 0\}$$

v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$.

Rešitev: Izrojene stožnice v tem šopu so:

$$\mathcal{S}_1' = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + z^2 + 8xz = 0\},$$
$$\mathcal{S}_2' = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xz = 0\},$$
$$\mathcal{S}_3' = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz = 0\}.$$

(14) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani stožnici:

$$\mathcal{S}_1 = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xz = 0\},$$
$$\mathcal{S}_2 = \{[x : y : z] \,|\, -y^2 + 2xz = 0\}.$$

(a) Poišči vse izrojene stožnice v šopu stožnic, ki ga določata $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$.

(b) Poišči tisto stožnico v danem šopu stožnic, ki vsebuje točko $[0 : 1 : 0]$.

Rešitev:

(a) Izrojene stožnice v tem šopu so:

$$\mathcal{S}_1' = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz = 0\},$$
$$\mathcal{S}_2' = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + z^2 + 8xz = 0\},$$
$$\mathcal{S}_3' = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xz = 0\}.$$

(b) Točko $[0 : 1 : 0]$ vsebuje stožnica $\mathcal{S} = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + z^2 + 8xz = 0\}$.

(15) Geometrično opiši množico

$$\mathcal{P} = \Big\{ \{[x : y : z] \,|\, \alpha(x + z) + \beta(x - y + z) = 0\} \,\Big|\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \Big\}.$$

Rešitev: Množica $\mathcal{P}$ predstavlja šop premic v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$, ki potekajo skozi točko $T = [-1 : 0 : 1]$.