Afina in projektivna geometrija

Izometrije Evklidskih prostorov

Začeli bomo s študijem izometrij Evklidske ravnine. To so preslikave $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki zadoščajo pogoju

$$d(T_1, T_2) = d(\tau(T_1), \tau(T_2))$$

za vsak par točk $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^2$. Glede na geometrični pomen je vsaka izometrija ene izmed oblik:

· translacija za nek vektor,
· rotacija okoli neke točke,
· zrcaljenje čez neko premico,
· zrcaljenje z zdrsom čez neko premico.

V nadaljevanju bomo spoznali, s kakšnimi predpisi lahko opišemo izometrije Evklidske ravnine.

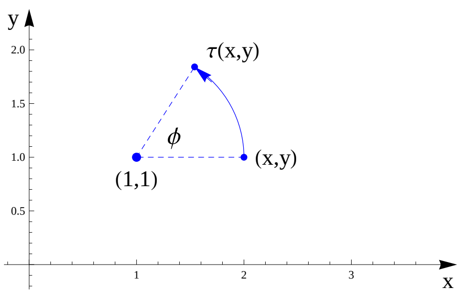
(1) Zapiši predpisa za naslednji izometriji Evklidske ravnine:

(a) rotacija za kot ϕ okoli točke $(1, 1)$,
(b) zrcaljenje čez premico $x + y = 1$.

Rešitev: (a) Najprej se spomnimo, kako se rotira vektorje v ravnini okoli koordinatnega izhodišča. Rotacijo za kot $\phi \in (0, 2\pi)$ v pozitivni smeri lahko predstavimo z rotacijsko matriko

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Rotacijske matrike so ortogonalne in imajo determinanto enako 1. Obratno pa vsaka 2×2 ortogonalna matrika, ki ima determinanto enako 1, ustreza neki rotaciji R_ϕ, ali pa je identična matrika.



Pri rotaciji okoli poljubne točke si lahko pomagamo s to matriko na naslednji način. Če želimo zavrteti točko (x, y) okoli točke $(1, 1)$, moramo najprej zarotirati vektor $(x-1, y-1)$ (to je vektor od središča vrtenja do točke) s pomočjo matrike R_ϕ, nato pa temu prišteti še vektor $(1, 1)$. Isti postopek deluje pri rotaciji okoli poljubne točke. Od tod dobimo predpis:

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \cdot x - \sin\phi \cdot y + 1 - \cos\phi + \sin\phi \\ \sin\phi \cdot x + \cos\phi \cdot y + 1 - \cos\phi - \sin\phi \end{bmatrix}.$$

Ta predpis lahko zapišemo tudi v obliki

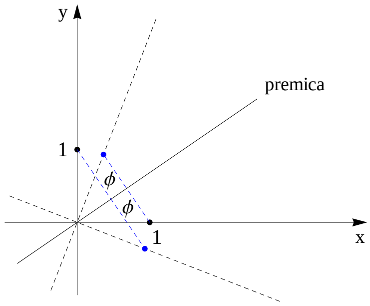
$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\cos\phi+\sin\phi \\ 1-\cos\phi-\sin\phi \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\tau(\vec{x}) = R_\phi \vec{x} + \vec{b}.$$

V splošnem velja, da lahko rotacijo okoli poljubne točke zapišemo kot kompozicijo translacije in pa rotacije okoli izhodišča.

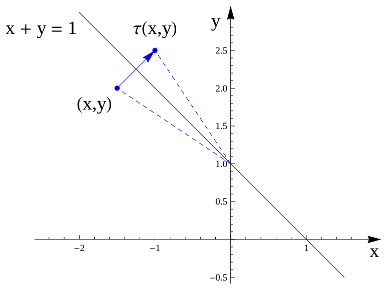
(b) Najprej si bomo pogledali, kako lahko predstavimo zrcaljenje čez premico, ki gre skozi izhodišče in oklepa kot $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ z abscisno osjo.



S slike je razvidno, da se točka $(1,0)$ preslika v točko $(\cos 2\phi, \sin 2\phi)$, točka $(0,1)$ pa v točko $(\sin 2\phi, -\cos 2\phi)$. Od tod dobimo matriko za zrcaljenje čez premico pod kotom ϕ

$$Z_\phi = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}.$$

Premica $x+y=1$ ne poteka skozi izhodišče, zato najprej izberimo neko točko na premici, npr. točko $(0,1)$. Zrcalno sliko točke (x,y) čez premico $x+y=1$ potem dobimo tako, da najprej z matriko $Z_{-\frac{\pi}{4}}$ prezrcalimo vektor $(x, y-1)$ nato pa prištejemo še vektor $(0,1)$.



Premica $x+y=1$ oklepa z abscisno osjo kot $\phi = -\pi/4$, zato se predpis glasi

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y+1 \\ -x+1 \end{bmatrix}.$$

Ta predpis lahko zapišemo tudi v obliki

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tudi sedaj velja, da lahko poljubno zrcaljenje zapišemo kot kompozicijo translacije in pa zrcaljenja čez neko premico skozi izhodišče. □

(2) Geometrično opiši naslednji izometriji Evklidske ravnine:

(a) $\tau(x, y) = (-y + 1, x - 1)$,
(b) $\tau(x, y) = (x + 2, -y)$.

Rešitev: (a) Najprej zapišimo preslikavo τ kot kompozicijo linearne preslikave in translacije

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

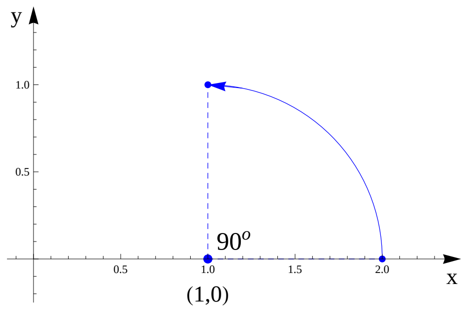
Ker je linearni del preslikave τ rotacija

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

je preslikava τ rotacija za kot $\phi = 90°$ okoli neke točke v ravnini. Ta točka je ravno fiksna točka preslikave τ, zato zanjo velja $\tau(x, y) = (x, y)$ oziroma:

$$\begin{aligned} -y + 1 &= x, \\ x - 1 &= y. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je točka $(1, 0)$, kar pomeni, da preslikava τ predstavlja rotacijo za kot $\phi = 90°$ okoli točke $(1, 0)$.



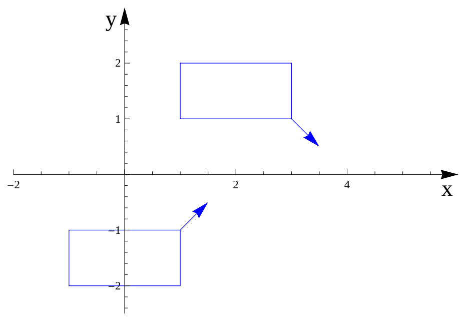
(b) Sedaj lahko zapišemo preslikavo τ v obliki

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Linearni del preslikave τ je tokrat zrcaljenje

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

čez abscisno os, preslikava τ pa je kompozicija tega zrcaljenja in pa translacije vzdolž abscisne osi. Kadar kaže translacijski vektor v smeri premice, čez katero zrcalimo, imamo opravka s tako imenovanim zrcaljenjem z zdrsom.



Opomba: Vsako izometrijo Evklidske ravnine lahko enolično zapišemo v obliki

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je $Q \in \mathrm{O}(2)$ ortogonalna matrika velikosti 2×2 in $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ nek poljuben vektor. Glede na obliko matrike Q in vektorja $\vec{a}$ ločimo štiri tipe izometrij.

1. Translacije:

Translacije so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$$

za nek $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. V tem primeru je $Q = \mathrm{I}$. Množica translacij tvori grupo, ki je izomorfna grupi $\mathbb{R}^2$.

2. Rotacije:

Rotacije so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = R_\phi\vec{x} + \vec{a}$$

za nek $\phi \in (0, 2\pi)$ in $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Takšna preslikava ustreza rotaciji za kot ϕ okoli točke v ravnini, ki je določena z enačbo $\tau(\vec{x}) = \vec{x}$.

3. Zrcaljenja:

Zrcaljenja so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Z_\phi\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je $\phi \in [-\pi/2, \pi/2)$, vektor $\vec{a}$ pa je pravokoten na premico skozi izhodišče, ki jo določa kot ϕ. Takšna preslikava ustreza zrcaljenju čez premico, ki oklepa kot ϕ z abscisno osjo in gre skozi točko $\frac{\vec{a}}{2}$.

4. Zrcaljenja z zdrsom:

Zrcaljenja z zdrsom so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Z_\phi\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je $\phi \in [-\pi/2, \pi/2)$, vektor $\vec{a}$ pa ni pravokoten na premico skozi izhodišče, ki jo določa kot ϕ. Takšna preslikava ustreza kompoziciji zrcaljenja čez neko premico, ki oklepa kot ϕ z abscisno osjo, ter translacije vzdolž premice pod kotom ϕ glede na abscisno os.

Množica vseh izometrij Evklidske ravnine tvori grupo, ki jo označimo z $\mathrm{E}(2)$. Translacije tvorijo podgrupo edinko grupe $\mathrm{E}(2)$, ki je izomorfna grupi $\mathbb{R}^2$, vse izometrije, ki ohranjajo izhodišče, pa podgrupo $\mathrm{O}(2)$ grupe $\mathrm{E}(2)$, ki pa ni podgrupa edinka. Ker lahko vsako izometrijo enolično zapišemo kot kompozicijo linearne izometrije in pa translacije, je grupa $\mathrm{E}(2)$ tako imenovani semidirektni produkt grup $\mathrm{O}(2)$ in $\mathbb{R}^2$, ki ga označimo z

$$\mathrm{E}(2) \cong \mathrm{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2.$$

Simbolično lahko vsako izometrijo predstavimo s parom $(Q, \vec{a})$, kjer je $Q \in \mathrm{O}(2)$ in $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Enota je par $(\mathrm{I}, 0)$, produkt in inverz pa se v tem zapisu izražata s formulama:

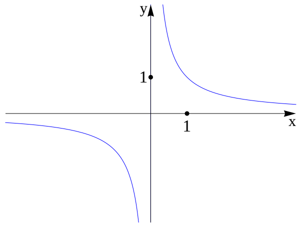
$$(Q_1, \vec{a}_1)(Q_2, \vec{a}_2) = (Q_1Q_2, Q_1\vec{a}_2 + \vec{a}_1),$$
$$(Q, \vec{a})^{-1} = (Q^{-1}, -Q^{-1}\vec{a}).$$

Grupa izometrij $\mathrm{E}(2)$ je tridimenzionalna, sestavljena pa je iz dveh komponent, ki sta obe homeomorfni $S^1 \times \mathbb{R}^2$. □

(3) Poišči vse izometrije Evklidske ravnine, ki ohranjajo dani množici:

(a) hiperbolo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$,
(b) kvadratno mrežo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$.

Rešitev: (a) Iščemo vse preslikave oblike $\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a}$, ki preslikajo hiperbolo nazaj nase. Te preslikave tvorijo grupo simetrij hiperbole.

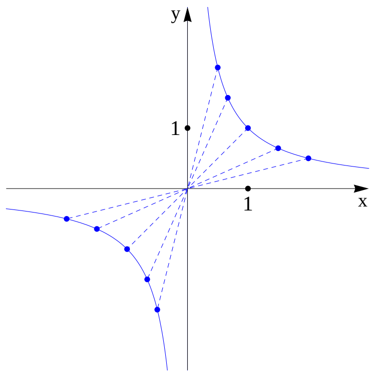


Če hočemo, da izometrija τ preslika hiperbolo nazaj nase, mora τ tudi obe asimptoti preslikati nazaj nase (lahko ju zamenja). Od tod sledi, da τ ohranja izhodišče, kar pomeni, da je $\vec{a} = 0$. Torej nam ostanejo možnosti:

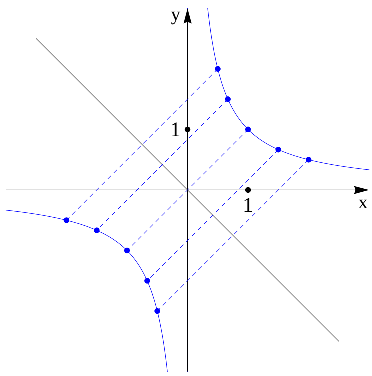
$$\tau(\vec{x}) = R_\phi \vec{x},$$
$$\tau(\vec{x}) = Z_\phi \vec{x},$$

za nek ϕ. Izmed rotacij pride v poštev rotacija R_π za kot $180°$, izmed zrcaljenj pa zrcaljenji $Z_{-\frac{\pi}{4}}$ in $Z_{\frac{\pi}{4}}$ čez simetrali sodih oziroma lihih kvadrantov. Hiperbolo seveda ohranja tudi identična preslikava. Imamo torej štiri preslikave, ki ohranjajo hiperbolo:

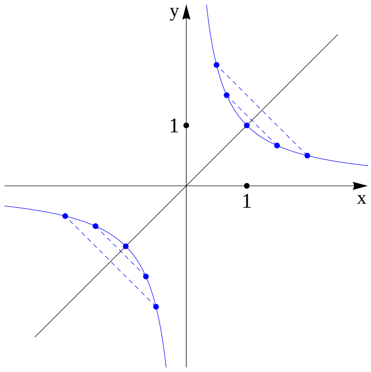
1. Identična preslikava $\tau(x, y) = (x, y)$,
2. Rotacija za kot π okoli koordinatnega izhodišča $\tau(x, y) = (-x, -y)$,



3. Zrcaljenje preko simetrale sodih kvadrantov $\tau(x, y) = (-y, -x)$,

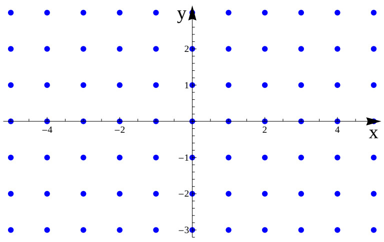


4. Zrcaljenje preko simetrale lihih kvadrantov $\tau(x,y) = (y,x)$.



Grupa simetrij hiperbole je torej izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

(b) Sedaj si poglejmo kvadratno mrežo $K = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$.



Vsaka simetrija te mreže je oblike

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

za primerno izbrana števila a, b, c, d, e in f, ki morajo zadoščati pogoju, da τ preslika K nazaj nase. Iz pogoja, da je

$$\tau(0,0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

spet element mreže K sledi, da sta e in f celi števili. Podobno sledi iz pogojev $\tau(1,0) \in K$ in $\tau(0,1) \in K$, da so tudi a, b, c in d cela števila. Če hočemo, da je matrika

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ortogonalna in da ima celoštevilske koeficiente imamo na voljo samo osem možnosti. Poleg identitete so to še štiri zrcaljenja

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Z_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Z_{-\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, Z_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in tri rotacije

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, R_{\pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, R_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Simetrije mreže K, ki so oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x},$$

kjer je Q ena izmed omenjenih osmih matrik, tvorijo podgrupo vseh simetrij mreže K. Ustrezajo ravno tistim simetrijam mreže, ki ohranjajo izhodišče in tvorijo grupo, ki je izomorfna diedrski grupi D_8. Vsako simetrijo mreže pa lahko zapišemo kot kompozicijo translacije za nek vektor s celoštevilskima komponentama in pa simetrije, ki ohranja izhodišče. $\square$

(4) Zapiši matriko za rotacijo za kot $\phi = 60°$ okoli osi $\vec{e} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Rešitev: Rotacija Evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$, ki ohranja izhodišče, je določena z osjo rotacije in kotom. Opišemo jo lahko z rotacijsko matriko Q, ki je 3×3 ortogonalna matrika z determinanto enako ena.

Za zapis matrike moramo izračunati, kako se preslikajo bazni vektorji. To lahko storimo s pomočjo Rodriguesove formule

$$R(\vec{e}, \phi)\vec{r} = \cos\phi\, \vec{r} + (\vec{e} \cdot \vec{r})(1 - \cos\phi)\vec{e} + \sin\phi\, \vec{e} \times \vec{r},$$

ki pove, kako vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ zavrtimo okrog osi $\vec{e}$ za kot ϕ.

V našem primeru je $\vec{e} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ in $\phi = \frac{\pi}{3}$, zato velja:

$$\begin{aligned}
R(\vec{e}, \phi)\vec{i} &= \left(\tfrac{1}{2}, 0, 0\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (1, 0, 0) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{6}}{4}, -\tfrac{\sqrt{6}}{4}\right), \\
R(\vec{e}, \phi)\vec{j} &= \left(0, \tfrac{1}{2}, 0\right) + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (0, 1, 0) = \left(-\tfrac{\sqrt{6}}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}\right), \\
R(\vec{e}, \phi)\vec{k} &= \left(0, 0, \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (0, 0, 1) = \left(\tfrac{\sqrt{6}}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right).
\end{aligned}$$

Od tod sledi, da rotaciji $R(\vec{e}, \phi)$ ustreza rotacijska matrika

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Opomba: Do rotacijske matrike Q lahko pridemo poleg uporabe Rodriguesove formule tudi na naslednje načine:

· z uporabo prehodne matrike P lahko matriko Q zapišemo v obliki $Q = PR_\phi P^{-1}$, kjer je R_ϕ matrika, ki ustreza rotaciji za kot ϕ okoli osi z in ima obliko

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

· z izračunom matričnega eksponenta,

· z uporabo kvaternionov.

$\square$

(5) Opiši izometriji Evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$, ki ju določata naslednji matriki:

(a) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Rešitev: Vsako izometrijo Evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ lahko enolično zapišemo v obliki

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a},$$

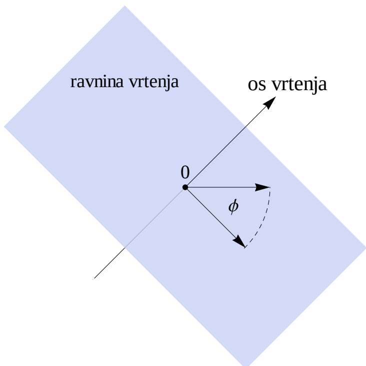
kjer je $Q \in O(3)$ ortogonalna matrika velikosti 3×3, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ pa poljuben vektor. Podrobno si bomo ogledali samo linearne izometrije. Te pustijo izhodišče pri miru in so oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x}.$$

Glede na determinanto matrike Q ločimo dve možnosti:

1. Če je $\det(Q) = 1$, predstavlja matrika Q rotacijo za nek kot okoli neke osi v prostoru.

- Lastne vrednosti matrike Q so $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = e^{\pm i\phi}$ za nek $\phi \in [0, 2\pi)$.
- Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju Q, ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = 1$.
- Kot vrtenja je $\pm\phi$, odvisno od orientacije osi.



2. Če je $\det(Q) = -1$, predstavlja matrika Q kompozicijo rotacije za nek kot okoli neke osi v prostoru in pa zrcaljenja preko ravnine, ki ima to os za normalo.

- Lastne vrednosti matrike Q so $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = e^{\pm i\phi}$ za nek $\phi \in [0, 2\pi)$.
- Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju Q, ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = -1$.
- Kot vrtenja je $\pm\phi$, odvisno od orientacije osi.
- Normala ravnine zrcaljenja kaže v smeri osi vrtenja.

(a) Hitro lahko preverimo, da je matrika Q ortogonalna, njena determinanta pa je

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Matrika Q torej predstavlja rotacijo okoli neke osi v prostoru. Najprej izračunajmo lastne vrednosti matrike Q

$$
\begin{aligned}
\det(Q - \lambda \mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda \end{vmatrix}, \\
&= -\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 \lambda + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2} - \lambda, \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1, \\
&= (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1).
\end{aligned}
$$

Torej je $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = \pm i$, kar pomeni, da matrika Q predstavlja rotacijo za kot $\phi = \frac{\pi}{2}$. Os rotacije se ujema z jedrom matrike $Q - \mathrm{Id}$:

$$
\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.
$$

Os vrtenja je simetrala lihih kvadrantov v xy-ravnini, določena z enačbama:

$$
\begin{aligned}
-x + y &= 0, \\
z &= 0.
\end{aligned}
$$

Smerni vektor te premice je vektor $\vec{e} = (1, 1, 0)$. Če zarotiramo nek poljuben vektor, lahko opazimo, da je Q rotacija za 90° v pozitivni smeri okoli vektorja $\vec{e}$.

(b) Matrika Q je ortogonalna, njena determinanta pa je

$$
\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{27} - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} = -1.
$$

Da bi lahko opisali geometrijski pomen matrike Q, najprej izračunajmo lastne vrednosti

$$
\begin{aligned}
\det(Q - \lambda \mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix}, \\
&= \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^3 - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} - 3 \cdot \frac{4}{9} \left(\frac{1}{3} - \lambda\right), \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1, \\
&= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).
\end{aligned}
$$

Vidimo, da je $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = 1$. V tem primeru predstavlja Q zrcaljenje čez ravnino, katere normala kaže v smeri lastnega vektorja pri lastni vrednosti $\lambda_1 = -1$.

$$
\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

V jedru te matrike je vektor $\vec{n} = (1, 1, 1)$, kar pomeni, da je Q zrcaljenje čez ravnino $x + y + z = 0$. $\square$