Afina in projektivna geometrija

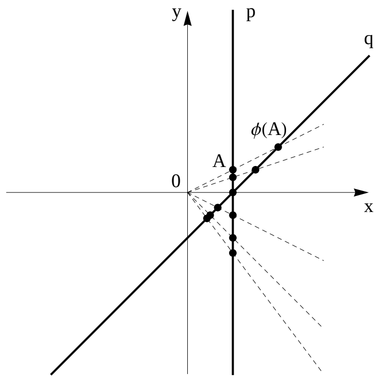
Kolineacije in projektivnosti

(1) V ravnini $\mathbb{R}^2$ sta dani premici $p:\ x=1$ in $q:\ y=x-1$.

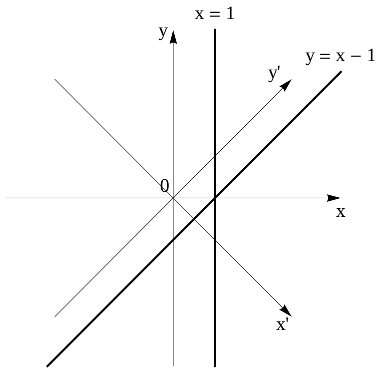
(a) Zapiši predpis za perspektivnost s centrom $(0,0)$ s premice p na premico q.

(b) Poišči sliki zaporedja točk $\{T_n(2,-n)\}$ na zaslonih, ki ju določata premici p in q.

Rešitev: (a) Imamo dve premici v ravnini, ki se sekata pod kotom 45°. Če vsaki izmed premic dodamo še točko v neskončnosti, ju lahko smatramo kot dve projektivni premici. Perspektivnost s centrom O je potem preslikava $\phi : p \to q$, ki točki $A \in p$ priredi presečišče premice OA in premice q.



Da bi zapisali predpis za perspektivnost s p na q, moramo najprej izbrati koordinate na premicah p in q. Na premici p ležijo točke oblike $(1,y)$, zato jo lahko parametriziramo kar s homogenimi koordinatami $[1:y]$. Točka $[0:1]$ ustreza točki v neskončnosti na premici p. Za parametrizacijo premice q bomo najprej definirali nov koordinatni sistem, ki je zavrten za 45° v negativni smeri glede na standardni koordinatni sistem.



Zvezo med koordinatami (x,y) in (x',y') lahko podamo v obliki

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

oziroma

$$
\begin{aligned}
x' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x-y\right), \\
y' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y\right).
\end{aligned}
$$

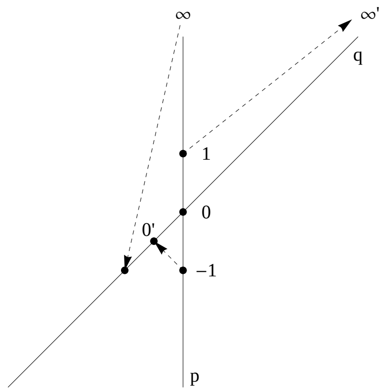
Nas zanima, kam se preslikajo točke oblike $[1:y]$. Rezultat bomo normalizirali tako, da bo slika ležala na premici q.

$$[1:y] \mapsto \left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1-y\right) : \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1+y\right)\right] = \left[\tfrac{\sqrt{2}}{2} : \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1+y}{1-y}\right].$$

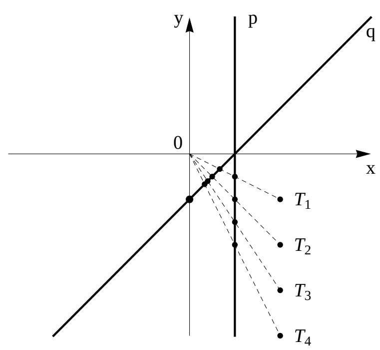
Od tod dobimo predpis

$$\phi(y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1+y}{1-y}$$

za preslikavo $\phi : p \to q$. Preslikavi takšne oblike rečemo lomljena linearna transformacija. Lahko jo sicer gledamo kot preslikavo med afinima premicama, bolj primerno pa jo je gledati kot preslikavo med projektivnima premicama. V tem primeru ϕ pošlje točko $[1:1]$ na p v točko v neskončnosti na q, točko v neskončnosti na p pa v točko $[1:-\frac{\sqrt{2}}{2}]$ na q.



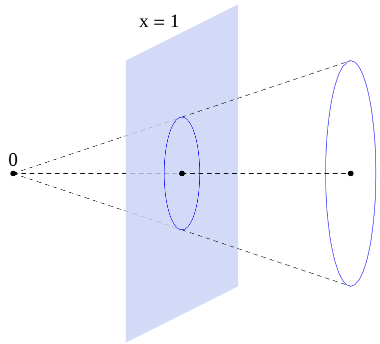
(b) Točke T_n se pri projekciji na premico p projicirajo v točke $\theta(T_n) = \left[1 : -\frac{n}{2}\right]$, pri projekciji na q pa v točke $\theta'(T_n) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2-n}{2+n}\right]$. Projekcije $\theta(T_n)$ konvergirajo proti točki v neskončnosti na premici p, medtem ko točke $\theta'(T_n)$ konvergirajo proti točki $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} : -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ na premici q.



$\square$

(2) S fotoaparatom z zornim kotom π in razdaljo 1 do ravnine fotografije napravimo posnetek, na katerem vidimo krožnico $y^2 + z^2 = 1$. Fotoaparat obrnemo za kot $\frac{\pi}{4}$ v levo in spet fotografiramo. Kaj vidimo na novem posnetku?

Rešitev: Pri tej nalogi bomo izračunali, kako se spremeni slika objekta na zaslonu pri zasuku zaslona. Da bo računanje bolj preprosto, si bomo pogledali zasuk za kot $\frac{\pi}{4}$, isti postopek pa lahko uporabimo tudi pri poljubnem zasuku zaslona.



Spet bomo imeli opravka z dvema koordinatnima sistemoma. Zveza med koordinatami (x, y, z) in (x', y', z') je pri rotaciji za kot $\frac{\pi}{4}$ okoli navpične osi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \\ y' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-x + y), \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Krožnica na prvotnem posnetku je podana kot rešitev sistema enačb $x = 1$, $y^2 + z^2 = 1$, v novih koordinatah pa velja

$$[1 : y : z] \mapsto \left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + y) : \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 + y) : z\right] = \left[1 : \tfrac{y-1}{y+1} : \tfrac{\sqrt{2}z}{y+1}\right].$$

Koordinate smo normalizirali na $x' = 1$, ker je tudi nov zaslon na oddaljenosti 1 od fotoaparata. Od tod dobimo predpis za prehod med koordinatami

$$\phi(y, z) = \left(\frac{y-1}{y+1}, \frac{\sqrt{2}z}{y+1}\right).$$

Zanima nas, kam preslikava ϕ preslika krožnico $y^2 + z^2 = 1$. Iz zvez:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y-1}{y+1}, \\ z' &= \frac{\sqrt{2}z}{y+1} \end{aligned}$$

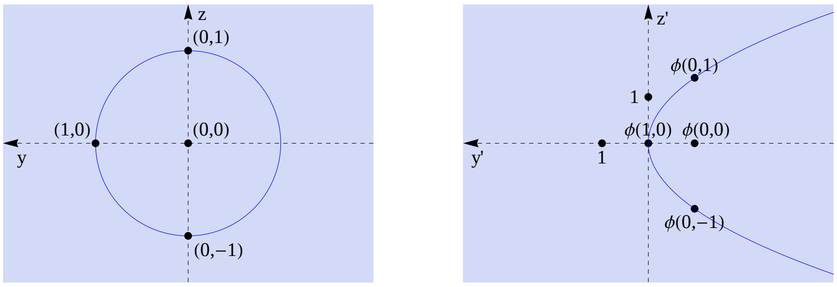
lahko izrazimo:

$$y = \frac{1+y'}{1-y'},$$
$$z = \frac{\sqrt{2}z'}{1-y'}.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= 1, \\ \frac{(1+y')^2}{(1-y')^2} + \frac{2z'^2}{(1-y')^2} &= 1, \\ (1+y')^2 + 2z'^2 &= (1-y')^2, \\ y' &= -\frac{1}{2}z'^2. \end{aligned}$$

Vidimo, da se krožnica na prvotni sliki preslika v parabolo na novi sliki.



Razlog je v tem, da se pri vrtenju fotoaparata v levo desni del krožnice pomika proti robu našega vidnega polja. Ko pade čez rob, to na sliki izgleda, kot da se razteza proti neskončnosti. □

(3) Geometrično opiši projektivnosti na projektivni premici $P(\mathbb{R}^2)$, ki jih porodijo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

in izračunaj, koliko fiksnih točk ima vsaka izmed njih.

Rešitev: Kolineacije in projektivnosti imajo v projektivni geometriji analogno vlogo, kot jo imajo izometrije v evklidski geometriji. Bijektivni preslikavi

$$\theta : P(V) \to P(W)$$

med projektivnima prostoroma rečemo kolineacija, če slika kolinearne točke v kolinearne točke. Po osnovnem izreku projektivne geometrije zmeraj obstaja obrnljiva semilinearna preslikava $M : V \to W$, da velja

$$\theta(X) = MX$$

za vsako točko $X \in P(V)$. Če je M linearna preslikava, rečemo kolineaciji projektivnost. Nad obsegi $\{\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ je vsaka kolineacija tudi projektivnost, nad obsegom $\mathbb{C}$ pa obstajajo kolineacije, ki niso projektivnosti. Ker nas zanimajo predvsem zvezne preslikave, se bomo večinoma ukvarjali s projektivnostmi.

(a) $\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}:}$

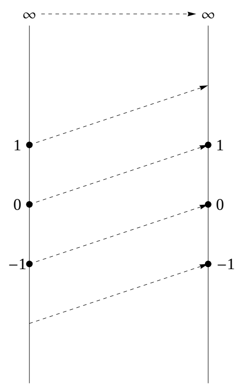
Matrika A predstavlja obrnljivo linearno preslikavo $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki določa naslednjo spremembo koordinat na ravnini:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= x + y. \end{aligned}$$

V homogenih koordinatah na projektivni premici $P(\mathbb{R}^2)$ jo lahko potem interpretiramo kot preslikavo s predpisom

$$[1 : y] \mapsto [1 : 1 + y],$$

kar pomeni, da lahko to projektivnost smatramo kot translacijo na projektivni premici. Edina fiksna točka je točka v neskončnosti.



(b) $\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}:}$

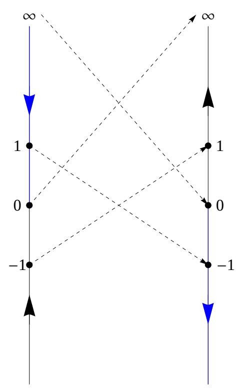
Matrika A predstavlja rotacijo ravnine za 90°. Prirejena transformacija ima predpis:

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= x, \end{aligned}$$

kar se v homogenih koordinatah izraža v obliki

$$[1 : y] \mapsto [-y : 1] = [1 : -\tfrac{1}{y}].$$

Ta projektivnost nima fiksnih točk.



(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$:

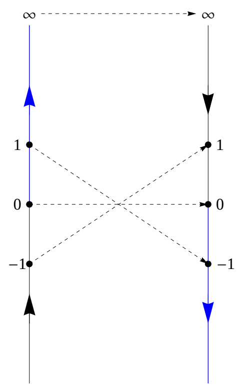
Tokrat imamo preslikavo, ki je porojena z zrcaljenjem preko abscisne osi. Dana je s predpisom:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -y, \end{aligned}$$

njej pridružena projektivnost pa je oblike

$$[1 : y] \mapsto [1 : -y].$$

To projektivnost lahko interpretiramo kot zrcaljenje na projektivni premici, ima pa dve fiksni točki: točko v neskončnosti in točko 0.



(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$:

V ravnini predstavlja matrika A razteg s središčem v koordinatnem izhodišču, ki vsako koordinato pomnoži z istim faktorjem:

$$\begin{aligned} x' &= 3x, \\ y' &= 3y. \end{aligned}$$

Na projektivni premici ta matrika porodi preslikavo

$$[1 : y] \mapsto [3 : 3y] = [1 : y],$$

ki je v bistvu identiteta. Torej je vsaka točka na projektivni premici fiksna točka.

Opomba: Vsaka obrnljiva matrika $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ porodi neko projektivnost na projektivnem prostoru $P(\mathbb{R}^n)$, vendar pa ta korespondenca ni bijektivna. Za vsak neničeln $\lambda \in \mathbb{R}$ namreč preslikavi A in λA porodita isto projektivnost. Fiksne točke porojene projektivnosti ustrezajo lastnim vektorjem matrike A. V primeru $n = 2$ ima lahko matrika 0, 1, 2 ali pa neskončno lastnih vektorjev. $\square$

(4) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani premici:

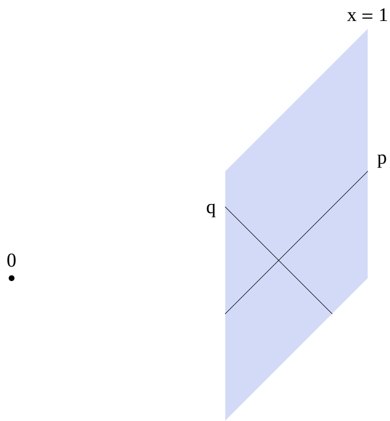
$$p = \{[x : y : z] \mid z = 0\},$$
$$q = \{[x : y : z] \mid x + y + z = 0\}.$$

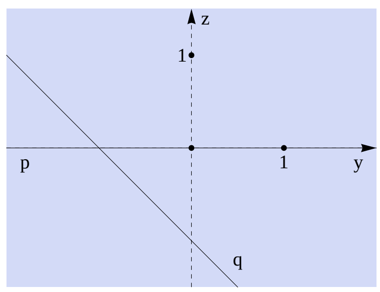
(a) Parametriziraj premici p in q.

(b) Poišči predpis za projektivnost $\theta : p \to q$, za katero je $\theta([1 : 0 : 0]) = [0 : 1 : -1]$, $\theta([0 : 1 : 0]) = [1 : 1 : -2]$ in $\theta([1 : 1 : 0]) = [1 : 3 : -4]$.

(c) Pokaži, da je θ perspektivnost in poišči center perspektivnosti θ.

Rešitev: Spoznali smo že, kako se opiše projektivnost projektivne premice $P(\mathbb{R}^2)$ nazaj nase, pri tej nalogi pa imamo dve projektivni premici, ki ležita v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$. Če hočemo izračunati predpis za projektivnost med njima, ju moramo najprej parametrizirati.





(a) Parametrizacija projektivne premice $p \subset P(\mathbb{R}^n)$ je projektivnost

$$i_p : P(\mathbb{R}^2) \to p.$$

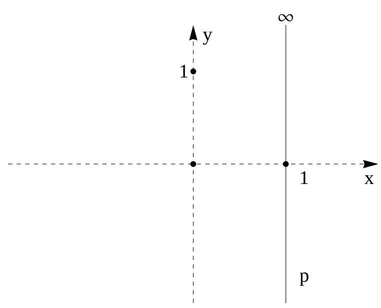
Parametrizacija nam omogoča, da premico p enačimo s standardno projektivno premico $P(\mathbb{R}^2)$. Izbira parametrizacije projektivne premice je analogna izbiri baze vektorskega prostora.

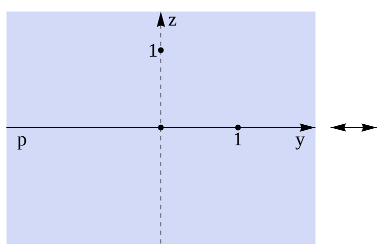
Parametrizacija premice p:

Vzamemo lahko parametrizacijo $i_p : P(\mathbb{R}^2) \to p$, ki je podana s predpisom:

$$i_p([x : y]) = [x : y : 0],$$
$$[1 : y] \mapsto [1 : y : 0].$$

Pri tej parametrizaciji se točka v neskončnosti $[0 : 1] \in P(\mathbb{R}^2)$ preslika v točko na premici v neskončnosti v $P(\mathbb{R}^3)$, ki ustreza vodoravni smeri.



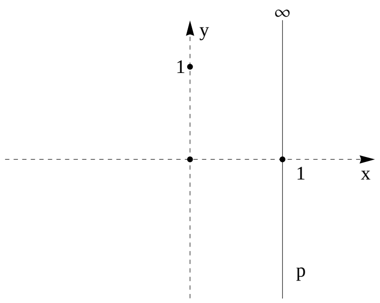


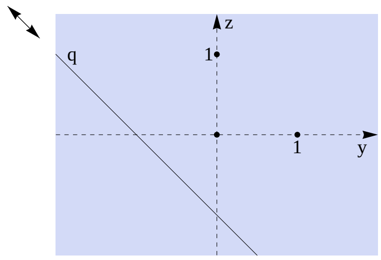
Parametrizacija premice q:

Tokrat bomo vzeli parametrizacijo $i_q : P(\mathbb{R}^2) \to q$, ki je podana s predpisom:

$$\begin{aligned} i_q([x:y]) &= [x : y : -x-y], \\ [1:y] &\mapsto [1 : y : -1-y]. \end{aligned}$$

Tokrat se točka v neskončnosti $[0:1] \in P(\mathbb{R}^2)$ preslika v točko na premici v neskončnosti v $P(\mathbb{R}^3)$, ki ustreza poševni smeri.





(b) Sedaj, ko imamo premici p in q parametrizirani, bomo zapisali predpis za projektivnost θ v teh parametrizacijah. Ta predpis bomo označili s θ_A. Pogoji $\theta([1:0:0]) = [0:1:-1]$, $\theta([0:1:0]) = [1:1:-2]$ in $\theta([1:1:0]) = [1:3:-4]$ se prevedejo v pogoje:

$$\begin{aligned} \theta_A([1:0]) &= [0:1], \\ \theta_A([0:1]) &= [1:1], \\ \theta_A([1:1]) &= [1:3]. \end{aligned}$$

$\theta_A([1:0]) = [0:1]$:

Ta pogoj nam da

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} a &= 0, \\ c &= \alpha. \end{aligned}$$

$\theta_A([0:1]) = [1:1]$:

Sedaj je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} b &= \beta, \\ d &= \beta. \end{aligned}$$

$\theta_A([1:1]) = [1:3]$:

Tokrat imamo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} a + b &= \gamma, \\ c + d &= 3\gamma. \end{aligned}$$

Od tod dobimo $a = 0$ in $c = 2b = 2d$. Če izberemo $b = d = 1$, dobimo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

od koder sledi $\theta_A([x : y]) = [y : 2x + y]$ oziroma

$$\theta([x : y : 0]) = [y : 2x + y : -2x - 2y].$$

(c) Naj bosta p in q premici v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ in $\theta : p \to q$ neka projektivnost. Potem je θ perspektivnost natanko takrat, ko ohranja presečišče premic p in q. V našem primeru je presečišče premic p in q točka $T = [1 : -1 : 0]$, zanjo pa velja

$$\theta([1 : -1 : 0]) = [-1 : 1 : 0] = [1 : -1 : 0],$$

od koder sledi, da je θ perspektivnost.

Center perspektivnosti lahko izračunamo tako, da izberemo različni točki A in B na premici p in nato izračunamo presečišče premic skozi A in $\theta(A)$ oziroma skozi B in $\theta(B)$.

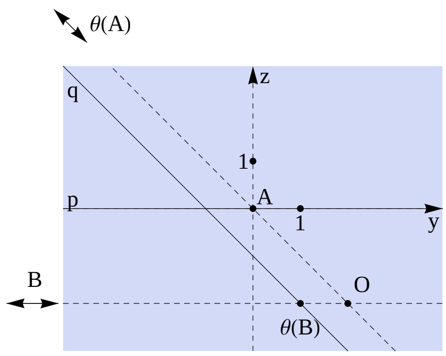
Najprej izberimo $A = [1 : 0 : 0]$. Potem je $\theta(A) = [0 : 1 : -1]$, premica skozi A in $\theta(A)$ pa ima enačbo

$$\overline{A\theta(A)} : \ \{[x : y : z] \,|\, y + z = 0\}.$$

Kot drugo točko si lahko izberemo točko $B = [0 : 1 : 0]$. Sedaj je $\theta(B) = [1 : 1 : -2]$ in

$$\overline{B\theta(B)} : \ \{[x : y : z] \,|\, 2x + z = 0\}.$$

Presek teh dveh premic je točka $O = [1 : 2 : -2]$. Če pogledamo sliko na zaslonu $x = 1$, ima premica $\overline{A\theta(A)}$ enačbo $z = -y$, premica $\overline{B\theta(B)}$ pa enačbo $z = -2$. Točki $\theta(A)$ in B ustrezata točkam na premici v neskončnosti, ki pripadata vodoravni oziroma poševni smeri. Točka B je ravno točka v neskončnosti na premici p, točka $\theta(A)$ pa točka v neskončnosti na premici q.



□

(5) Konstruiraj vložitev afine ravnine $\mathbb{R}^2$ v projektivno ravnino $P(\mathbb{R}^3)$, pri kateri bo premica $p:\ \{[x:y:z] \,|\, x+z=0\}$ premica v neskončnosti.

Rešitev: Spoznali smo že, da imamo dekompozicijo

$$\text{projektivna ravnina} = \text{afina ravnina} \cup \text{premica v neskončnosti}.$$

Ta razcep pa ni enoličen. Odvisen je namreč od vložitve afine ravnine v projektivno ravnino. Vloženo afino ravnino si lahko predstavljamo kot zaslon, na katerega se projicirajo objekti iz $\mathbb{R}^3$. Predstavljen je z enačbo

$$ax + by + cz = d,$$

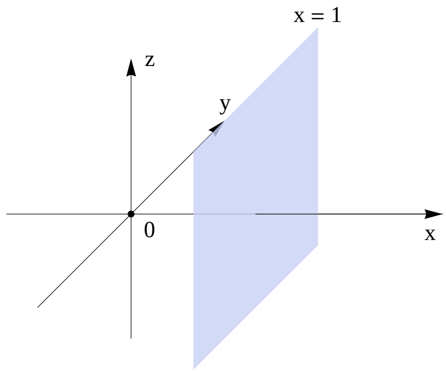
za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pogoj je, da je neničeln d ter vsaj eden izmed a, b, c. Pri dani vložitvi afine ravnine ima premica v neskončnosti, ki pripada tej vložitvi, enačbo

$$p_\infty :\ \{[x:y:z] \,|\, ax + by + cz = 0\}.$$

Ponavadi uporabljamo dve standardni vložitvi afine ravnine v projektivno ravnino, ki ju določata zaslona $x = 1$ in $z = 1$. Pri zaslonu $x = 1$ je vložitev definirana s predpisom:

$$\begin{aligned} i &: \mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R}^3), \\ (y, z) &\mapsto [1 : y : z]. \end{aligned}$$

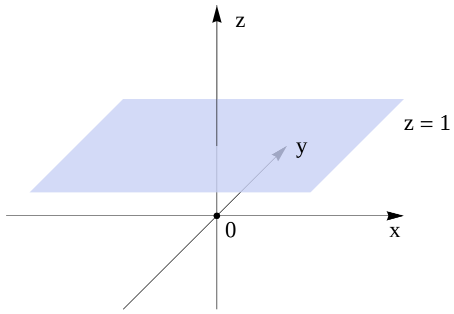
Pri tej vložitvi je $\{[x:y:z] \,|\, x = 0\}$ premica v neskončnosti.



Pri zaslonu $z = 1$ pa je vložitev definirana s predpisom:

$$\begin{aligned} i &: \mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R}^3), \\ (x, y) &\mapsto [x : y : 1]. \end{aligned}$$

Tu je $\{[x:y:z] \,|\, z = 0\}$ premica v neskončnosti.



Če hočemo, da bo $p : \{[x : y : z] \,|\, x + z = 0\}$ premica v neskončnosti, lahko vzamemo vložitev

$$\begin{aligned} i &: \mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R}^3), \\ (x, y) &\mapsto [x : y : 1 - x]. \end{aligned}$$

Opomba: Iskano vložitev bi lahko dobili tudi tako, da bi najprej izbrali projektivnost $\theta_A : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$, ki standardno premico v neskončnosti $\{[x : y : z] \,|\, z = 0\}$ preslika na premico $p : \{[x : y : z] \,|\, x + z = 0\}$. Ena izmed takšnih projektivnosti je porojena z matriko

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Če standardno vložitev komponiramo s to projektivnostjo, dobimo vložitev

$$(x, y) \mapsto [x + 1 : \sqrt{2}y : 1 - x].$$

$\square$