Afina in projektivna geometrija

Projektivna ravnina

(1) Objekte v $\mathbb{R}^3$ bi radi projicirali na ravnino $x = 1$ vzdolž žarkov skozi koordinatno izhodišče.

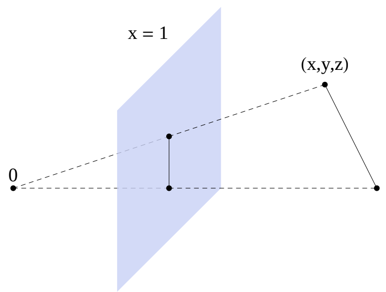
(a) Zapiši predpis za to projekcijo.

(b) Ugotovi, kam se projicirata poltraka:

$$p_1 : \vec{r} = (1, 1, -1) + t(1, 0, 0),\ t \geq 0,$$
$$p_2 : \vec{r} = (1, -1, -1) + t(1, 0, 0),\ t \geq 0.$$

(c) Skiciraj projekcijo kocke z oglišči $A(2, -1, -1)$, $B(2, 1, -1)$, $C(2, 1, 1)$, $D(2, -1, 1)$, $E(4, -1, -1)$, $F(4, 1, -1)$, $G(4, 1, 1)$ in $H(4, -1, 1)$.

Rešitev: (a) Recimo, da imamo točko $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ki leži desno od ravnine $x = 1$. Njena projekcija na ravnino $x = 1$ vzdolž žarka skozi izhodišče je presek žarka in pa ravnine.

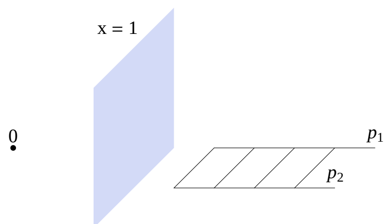


Žarek lahko parametriziramo s predpisom $p : \vec{r} = t(x, y, z)$. Če želimo, da bo prva koordinata enaka 1, mora biti $t = 1/x$, kar nam da predpis

$$\phi(x, y, z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Mislimo si lahko, da je ravnina $x = 1$ zaslon in da nam ta projekcija določa, kakšna je slika nekega tridimenzionalnega objekta na zaslonu.

(b) Izračunajmo sedaj, kakšna bi bila slika železniških tirov, če bi jih projicirali na zaslon.



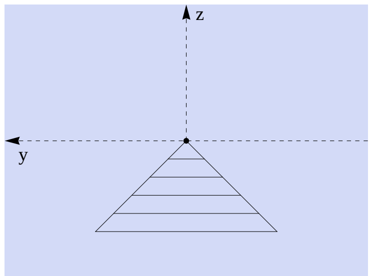
Poltrak p_1 je parametriziran s predpisom

$$p_1 : \vec{r} = (1 + t, 1, -1),$$

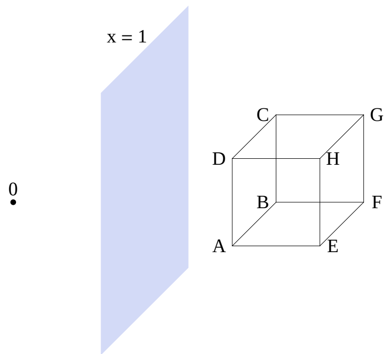
njegova slika na zaslonu pa je krivulja

$$\phi(p_1) : \vec{r} = \left(\frac{1}{1+t}, -\frac{1}{1+t} \right).$$

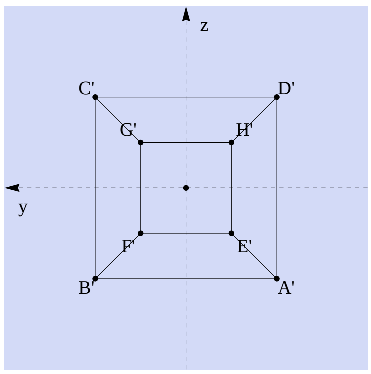
Ko t preteče interval $[1, \infty)$, na zaslonu dobimo daljico od točke $(1, -1)$ do točke $(0, 0)$. Na podoben način lahko izračunamo, da je slika poltraka p_2 daljica od točke $(-1, -1)$ do točke $(0, 0)$. Na sliki na zaslonu se sicer vzporedna poltraka sekata v točki na obzorju.



(c) Sedaj si bomo pogledali, kakšna je slika kocke, če jo projiciramo na zaslon.



Označimo s črticami slike oglišč kocke na zaslonu. Potem je $A'\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $B'\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $C'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $D'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $E'\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $F'\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, $G'\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ in $H'\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Na zaslonu dobimo naslednji lik.



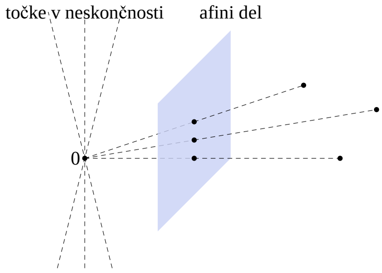
Vidimo, da objekti, ki ležijo dlje od zaslona, na zaslonu izgledajo manjši. $\square$

(2) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ poišči:

(a) premico, ki poteka skozi točki $T_1 = [1 : 2 : 3]$ in $T_2 = [1 : 1 : 4]$,

(b) presek premic $p_1 = \{[x : y : z] \,|\, x + y + z = 0\}$ in $p_2 = \{[x : y : z] \,|\, -x - y + z = 0\}$.

Rešitev: Prejšnja naloga nam je pokazala, da premice v evklidskem prostoru ustrezajo točkam na zaslonu. Če smo povsem natančni, to velja za premice, ki niso vzporedne zaslonu. Če zaslonu dodamo še množico teh premic, dobimo projektivno ravnino. Zaslon tvori afini del projektivne ravnine, množica premic, ki so vzporedne zaslonu, pa tako imenovano premico v neskončnosti.



Formalno definiramo projektivno ravnino $P(\mathbb{R}^3)$ na naslednji način:

· točke v $P(\mathbb{R}^3)$ ustrezajo premicam skozi izhodišče v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$,

· premice v $P(\mathbb{R}^3)$ ustrezajo ravninam skozi izhodišče v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$.

Vsako premico p v $\mathbb{R}^3$, ki poteka skozi izhodišče, lahko parametriziramo s predpisom

$$p : \vec{r} = t\vec{s},$$

kjer je $\vec{s} = (x, y, z)$ njen smerni vektor. Torej je vsaka taka premica določena s svojim smernim vektorjem, zato lahko premico p na kratko opišemo z oznako

$$p = [x : y : z].$$

Če gledamo premico p kot točko projektivne ravnine $P(\mathbb{R}^3)$, rečemo, da so $[x : y : z]$ njene homogene koordinate. Ker je smerni vektor premice določen le do skalarnega večkratnika natančno, velja

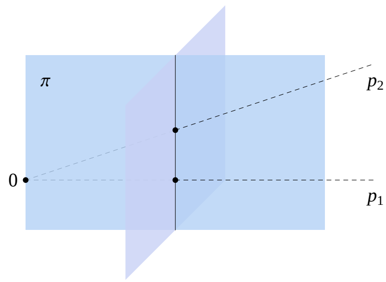
$$[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$$

za vsak $\lambda \neq 0$. Na projektivno ravnino $P(\mathbb{R}^3)$ lahko torej gledamo tudi kot na množico ekvivalenčnih razredov trojic $[x : y : z]$, ki imajo vsaj eno koordinato neničelno.

(a) Imamo točki $T_1 = [1 : 2 : 3]$ in $T_2 = [1 : 1 : 4]$ v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$, ki ju lahko predstavimo s premicama:

$$p_1 : \vec{r} = t(1, 2, 3),$$
$$p_2 : \vec{r} = t(1, 1, 4)$$

v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$.



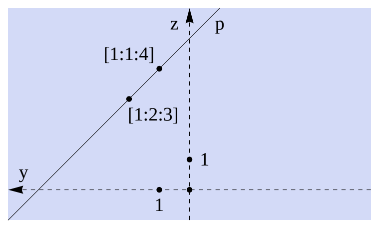
Ti dve premici natanko določata ravnino Π skozi izhodišče, ki pa po drugi strani določa premico p skozi točki $[1:2:3]$ in $[1:1:4]$ v projektivni ravnini. Ta ravnina ima smer normale

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (1,2,3) \times (1,1,4) = (5,-1,-1).$$

Premica p skozi točki $[1:2:3]$ in $[1:1:4]$ v $P(\mathbb{R}^3)$ je torej množica

$$p = \{[x:y:z] \,|\, 5x - y - z = 0\} \subset P(\mathbb{R}^3).$$

Na zaslonu $x = 1$ je premica p določena z enačbo $y + z = 5$.



(b) Sedaj iščemo presek premic:

$$p_1 = \{[x:y:z] \,|\, x + y + z = 0\},$$
$$p_2 = \{[x:y:z] \,|\, -x - y + z = 0\}$$

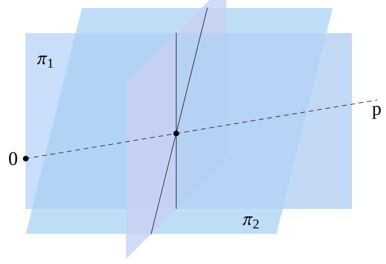
v projektivni ravnini. Ti dve premici sta določeni z ravninama:

$$\Pi_1 : \ x + y + z = 0,$$
$$\Pi_2 : \ -x - y + z = 0$$

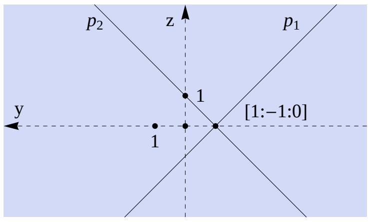
v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$. Njun presek v $\mathbb{R}^3$ je premica p s smernim vektorjem

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1,1,1) \times (-1,-1,1) = (2,-2,0).$$

Od tod sledi, da je presek premic p_1 in p_2 točka $T = [1:-1:0]$.



Na zaslonu $x = 1$ imata premici p_1 in p_2 enačbi $y + z = -1$ in $-y + z = 1$, točka T pa ima koordinati $(-1, 0)$.



□

(3) Pokaži, da realna projektivna ravnina $P(\mathbb{R}^3)$ zadošča aksiomom aksiomatsko definirane projektivne ravnine.

Rešitev: Aksiomi aksiomatsko definirane projektivne ravnine so podobni aksiomom afine ravnine, le da aksiom o vzporednicah nadomestimo z aksiomom, da se poljubni dve premici sekata. Aksiomi aksiomatsko definirane projektivne ravnine so:

$P1$ Vsak par točk leži na natanko eni premici.

$P2$ Vsak par premic se seka v natanko eni točki.

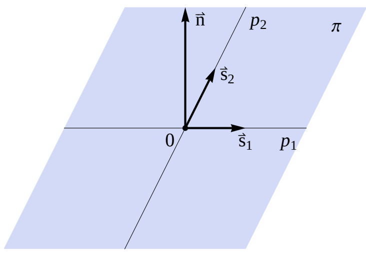
$P3$ Obstajajo 4 točke, od katerih nobena trojica ni kolinearna.

Spomnimo se, da točke v realni projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ ustrezajo premicam skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$, premice v $P(\mathbb{R}^3)$ pa ravninam skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$.

Pokažimo najprej, da vsak par točk v projektivni ravnini leži na natanko eni premici. Izberimo različni točki $[x_1 : y_1 : z_1]$ in $[x_2 : y_2 : z_2]$. Pripadajoči premici v $\mathbb{R}^3$ imata nevzporedna smerna vektorja

$$\vec{s}_1 = (x_1, y_1, z_1),$$
$$\vec{s}_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

zato enolično določata neko ravnino skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$.



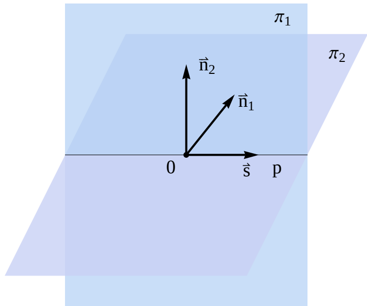
Ta ravnina ima normalo

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (n_1, n_2, n_3).$$

Pripadajoča ravnina je določena z enačbo $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$, zato je premica skozi točki $[x_1 : y_1 : z_1]$ in $[x_2 : y_2 : z_2]$ naslednja množica točk v projektivni ravnini

$$\{[x : y : z] \mid n_1 x + n_2 y + n_3 z = 0\}.$$

Sedaj bomo pokazali, da analogna lastnost v projektivni ravnini velja tudi za premice. Vsak par premic se namreč seka v natanko eni točki.



Izberimo torej različni premici v projektivni ravnini, ki sta določeni z ravninama

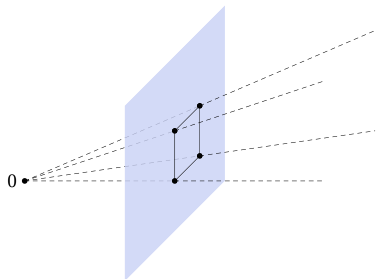
$$\Pi_1 : \vec{n}_1 \cdot \vec{r} = 0,$$
$$\Pi_2 : \vec{n}_2 \cdot \vec{r} = 0$$

v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$. Presek teh dveh ravnin je premica v evklidskem prostoru s smernim vektorjem

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (s_1, s_2, s_3),$$

zato je presek danih premic v projektivni ravnini točka $[s_1 : s_2 : s_3]$.

Kot primer štirih točk, od katerih nobena trojica ni kolinearna, lahko vzamemo na primer točke $[1 : 1 : 1]$, $[1 : -1 : 1]$, $[1 : -1 : -1]$ in $[1 : 1 : -1]$.



□

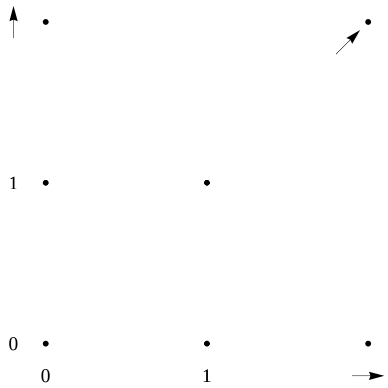
(4) Izračunaj število točk in število premic v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_p^3)$.

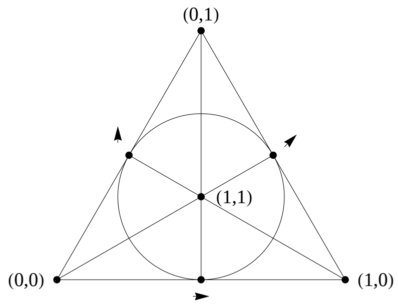
Rešitev: Točke v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_p^3)$ ustrezajo premicam skozi izhodišče v prostoru $\mathbb{F}_p^3$. Vemo že, da je takšnih premic $\frac{p^3-1}{p-1}$, zato ima projektivna ravnina $P(\mathbb{F}_p^3)$

$$\frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1$$

točk. Do tega rezultata lahko pridemo tudi drugače, če upoštevamo, da je projektivna ravnina unija afine ravnine in pa premice v neskončnosti. Afina ravnina $\mathbb{F}_p^2$ vzebuje p^2 točk, točke na premici v neskončnosti pa ustrezajo ekvivalenčnim razredom vzporednih premic v $\mathbb{F}_p^2$. Teh razredov je ravno $p + 1$, zato ima projektivna ravnina $P(\mathbb{F}_p^3)$ natanko $p^2 + p + 1$ točk.

Kot primer si poglejmo projektivno ravnino $P(\mathbb{F}_2^3)$. Sestoji iz štirih točk v afini ravnini in treh točk na premici v neskončnosti, ki ustrezajo trem smerem v afini ravnini. Tej ravnini rečemo Fanova ravnina in jo pogosto ponazorimo z diagramom na desni sliki.





Po principu dualnosti je tudi število premic v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_p^3)$ enako $p^2 + p + 1$. Bolj eksplicitno pa lahko to vidimo, če preštejemo, koliko ravnin v prostoru $\mathbb{F}_p^3$ gre skozi izhodišče. Vsaka takšna ravnina je določena z enačbo

$$ax + by + cz = 0,$$

kjer je $(a, b, c) \in \mathbb{F}_p^3$ neničeln vektor, ki igra vlogo normale na ravnino. Ker vzporedni normalni vektorji določajo isto ravnino, je ravnin skozi izhodišče v $\mathbb{F}_p^3$ ravno toliko kot je premic skozi izhodišče. □

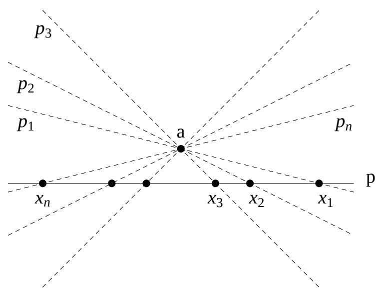
(5) Naj bo $\mathcal{P}$ končna aksiomatsko definirana projektivna ravnina.

(a) Pokaži, da imajo vse premice enako število točk.

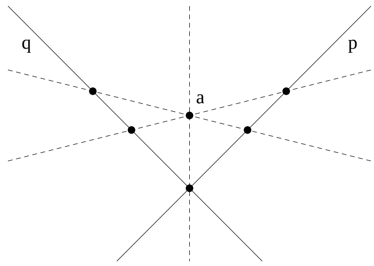
(b) Pokaži, da v projektivni ravnini reda n skozi vsako točko poteka $n + 1$ premic.

(c) Izračunaj število točk in število premic v projektivni ravnini reda n.

Rešitev: Izberimo poljubno premico p v $\mathcal{P}$ in poljubno točko $a \in \mathcal{P}$, ki ne leži na p. Potem je število točk na premici p enako številu premic, ki potekajo skozi točko a. To sledi iz dejstva, da po aksiomu $P2$ vsaka premica skozi a seka p v natanko eni točki. Torej imamo bijektivno korespondenco med točkami na p in premicami skozi a.



(a) Naj bosta p in q poljubni različni premici v $\mathcal{P}$. Po aksiomu $P3$ obstaja točka $a \in \mathcal{P}$, ki ne leži niti na p niti na q. Premic skozi a je potem ravno toliko kot je točk na p in hkrati toliko, kot je točk na q. To pa pomeni, da imata p in q enako število točk.



(b) Projektivna ravnina $\mathcal{P}$ je reda n, če leži na vsaki premici $n+1$ točk. Izberimo sedaj poljubno točko $a \in \mathcal{P}$. Potem po aksiomu $P3$ obstaja premica p v $\mathcal{P}$, ki ne vsebuje točke a. Ta premica ima $n+1$ točk, zato gre skozi a natanko $n+1$ premic.

(c) Izberimo poljubno točko $a \in \mathcal{P}$ in naj bodo $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ premice, ki potekajo skozi točko a. Poljubni dve izmed teh premic se sekata natanko v točki a, njihova unija pa je $\mathcal{P}$. Imamo torej $n+1$ premic, ki vsebujejo po $n+1$ točk. Če seštejemo te točke in upoštevamo, da smo točko a šteli $(n+1)$-krat, dobimo, da je vseh točk

$$\text{število točk v } \mathcal{P} = (n+1)(n+1) - n = n^2 + n + 1.$$

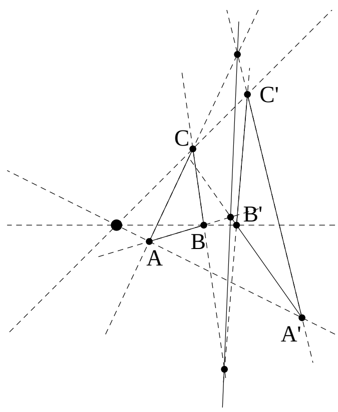
Za izračun števila premic v $\mathcal{P}$ lahko uporabimo princip dualnosti, lahko pa to število izračunamo tudi direktno. Imamo namreč n^2+n+1 točk in skozi vsako gre $n+1$ premic. Ker na vsaki premici leži $n+1$ točk, smo vsako premico šteli $(n+1)$-krat. Zato je vseh premic n^2+n+1. $\square$

(6) Pokaži, da trikotnika z oglišči $A = [1:1:0]$, $B = [1:0:1]$, $C = [1:1:1]$ in $A' = [1:3:0]$, $B' = [1:0:3]$, $C' = [1:3:3]$ v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_5^3)$ zadoščata pogojem Desarguesovega izreka.

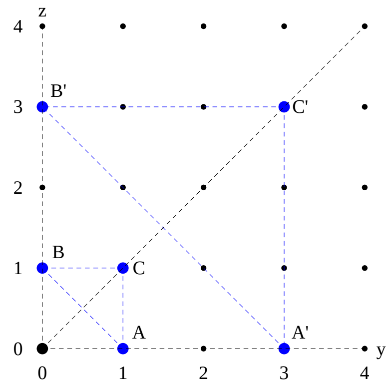
Rešitev: V vsaki projektivni ravnini, ki jo dobimo iz afine ravnine pridružene nekemu polju, velja Desarguesov izrek.

Desarguesov izrek:

Naj bosta ABC in $A'B'C'$ trikotnika v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}^3)$, kjer je $\mathbb{F}$ polje. Potem sta ABC in $A'B'C'$ v perspektivni legi natanko takrat, ko so točke $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ in $AC \cap A'C'$ kolinearne.



Poglejmo si najprej skico, ki jo dobimo, če vzamemo samo afini del projektivne ravnine $P(\mathbb{F}_5^3)$, ki ustreza $x = 1$.



Slika nam daje slutiti, da se premice AA', BB' in CC' sekajo v točki $[1 : 0 : 0]$, točke $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ in $AC \cap A'C'$ pa ležijo na premici v neskončnosti.

Formalno lahko to pokažemo z računom. Premica AA' v $P(\mathbb{F}_5^3)$ pripada ravnini $z = 0$ v $\mathbb{F}_5^3$, premica BB' ravnini $y = 0$, premica CC' pa ravnini $y + 4z = 0$. Od tod sledi, da se vse tri premice sekajo v točki $[1 : 0 : 0]$.

Na podoben način lahko izračunamo, da velja:

$$
\begin{aligned}
AB \cap A'B' &= [0 : 1 : 4], \\
AC \cap A'C' &= [0 : 0 : 1], \\
BC \cap B'C' &= [0 : 1 : 0].
\end{aligned}
$$

Opazimo lahko, da vse tri točke ležijo na premici v $P(\mathbb{F}_5^3)$, ki ustreza ravnini $x = 0$. To pa je ravno premica v neskončnosti. $\square$