Afina in projektivna geometrija

Stožnice

(1) Skiciraj stožnico v evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$, ki je določena z enačbo

$$\frac{5}{16}x^2 - \frac{3}{8}xy + \frac{5}{16}y^2 = 1.$$

Rešitev: Stožnica v evklidski ravnini je krivulja, ki jo določa enačba

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Posamezni členi v zgornji enačbi imajo različne geometrijske pomene:

- Člen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ določa tip stožnice in pa njeno orientacijo. Neizrojene stožnice so krožnica, elipsa, parabola in hiperbola, poleg njih pa obstajajo še izrojene stožnice.
- Člen $2dx + 2ey$ določa središče stožnice.
- Člen f določa velikost stožnice.

Vsaki stožnici lahko priredimo simetrično matriko

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

ki nam pomaga pri skiciranju stožnice. Lastni vektorji matrike M določajo orientacijo stožnice, lastne vrednosti pa nam povedo, katerega tipa je stožnica.

V našem primeru je

$$M = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}.$$

<u>Lastni vrednosti matrike M</u>:

Lastni vrednosti matrike M zadoščata enačbi

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{16} - \lambda & -\frac{3}{16} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{5}{8}\lambda + \frac{1}{16} = 0,$$

od koder sledi, da sta lastni vrednosti matrike M števili

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{8}.$$

<u>Lastna vektorja matrike M</u>:

Lastna vektorja matrike M sta vektorja, ki napenjata jedri matrik $M - \lambda_1 \mathrm{Id}$ in $M - \lambda_2 \mathrm{Id}$. To pomeni, da mora vektor v_1, ki pripada lastni vrednosti λ_1, zadoščati sistemu enačb

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{16} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Vrstici sta linearno odvisni, zato je dovolj poiskati vektor, ki reši zgornjo enačbo. Prvo koordinato si lahko izberemo poljubno, druga pa je nato natanko določena. Vzamemo lahko vektor $v_1 = (1, -1)$.

Vektor v_2, ki pripada lastni vrednosti λ_2, pa mora rešiti sistem enačb

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{3}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Sedaj lahko vzamemo vektor $v_2 = (1, 1)$.

Lastni vrednosti in lastna vektorja nam povedo, da imamo opravka z elipso, ki ima osi v smereh simetral lihih in sodih kvadrantov. Formalno to lahko pokažemo tako, da najprej z normiranjem lastnih vektorjev naredimo razcep

$$M = PDP^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

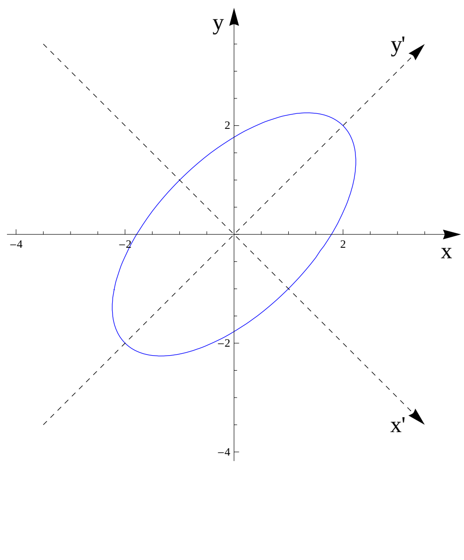
Prehodna matrika P določa zamenjavo koordinat:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - y\right), \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y). \end{aligned}$$

V novih koordinatah lahko našo stožnico izrazimo z enačbo

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{8} = 1,$$

kar pomeni, da gre za elipso s polosema $\sqrt{2}$ in $2\sqrt{2}$ v smeri simetral kvadrantov.



□

(2) Homogeniziraj dane enačbe in opiši stožnice v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$, ki jih določajo:

(a) $x^2 + y^2 = 1$,

(b) $x^2 - y^2 = 1$,

(c) $y^2 = x$.

Rešitev: Stožnici v evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$, ki je določena z enačbo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

lahko priredimo stožnico v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ s homogenizacijo zgornje enačbe. To pomeni, da vsakemu členu dodamo potenco spremenljivke z, tako da imajo na koncu vsi členi stopnjo 2. Konkretno tako dobimo stožnico z enačbo

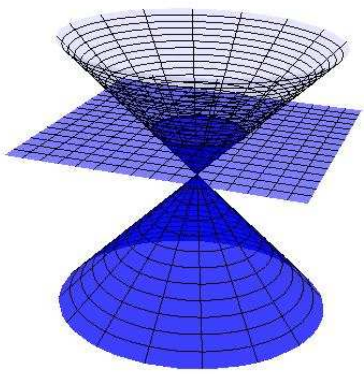
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

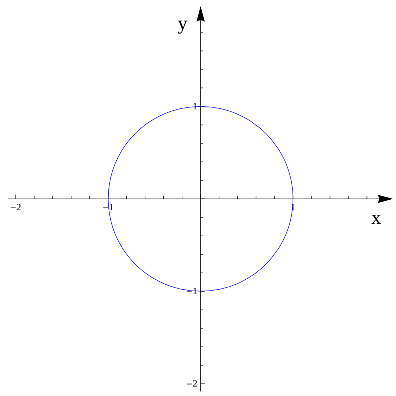
Pri homogenizaciji torej iz kvadratne enačbe dveh spremenljivk dobimo kvadratno enačbo treh spremenljivk, ki določa neko ploskev v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$. Ker je dobljena enačba homogena, je ta ploskev premonosna (sestavljena iz premic), zato definira neko krivuljo v projektivni ravnini. Prvotna krivulja ustreza zožitvi te krivulje na afini del projektivne ravnine, ki je dan s pogojem $z = 1$. V splošnem pa lahko pri homogenizaciji krivulje dobimo še kakšno dodatno točko na premici v neskončnosti.

(a) Pri homogenizaciji enačbe $x^2 + y^2 = 1$ dobimo enačbo

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ta enačba določa neko krivuljo v projektivni ravnini, katere slika na zaslonu $z = 1$ je ravno prvotna krožnica.





Poglejmo še, ali morda vsebuje še kakšno točko na premici v neskončnosti. Na premici v neskončnosti je $z = 0$, zato dobimo pogoj

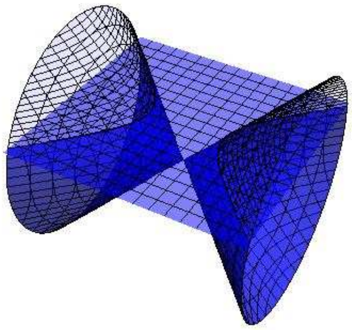
$$x^2 + y^2 = 0,$$

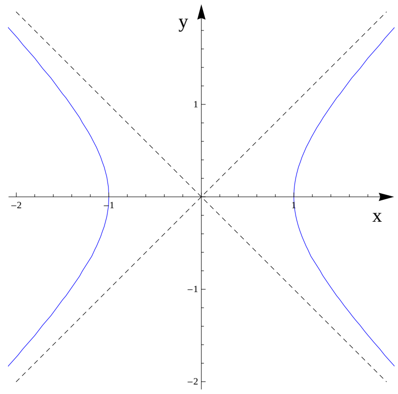
od koder sledi $x = y = 0$. Rešitev enačbe je torej točka $(0, 0, 0)$, ki pa ne definira nobene točke v projektivni ravnini.

(b) Pri homogenizaciji enačbe $x^2 - y^2 = 1$ dobimo enačbo

$$x^2 - y^2 = z^2.$$

Na zaslonu $z = 1$ tokrat dobimo hiperbolo.



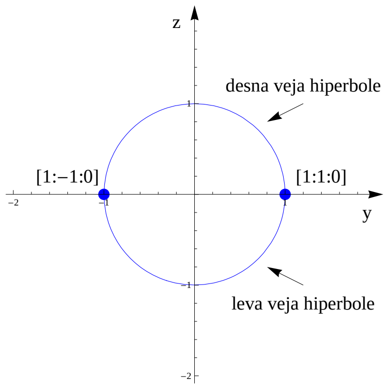


V preseku te projektivne krivulje s premico v neskončnosti so točke, za katere velja

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Takšni sta točki $T_1 = [1 : 1 : 0]$ in $T_2 = [1 : -1 : 0]$, ustrezata pa asimptotama hiperbole.

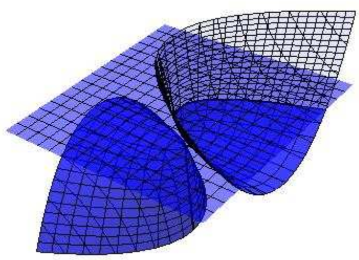
Zanimivo je pogledati, kaj dobimo, če to krivuljo pogledamo na zaslonu $x = 1$. Tam je podana z enačbo $y^2 + z^2 = 1$, kar pomeni, da gre za krožnico. Točki $(1, 0)$ in $(-1, 0)$ ustrezata točkama T_1 in T_2, medtem ko zgornja in spodnja polkrožnica ustrezata desni in levi veji hiperbole.

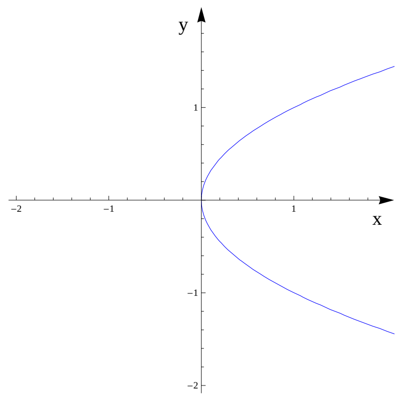


(c) Za konec si poglejmo še parabolo $y^2 = x$. Če to enačbo homogeniziramo, dobimo enačbo

$$y^2 = xz.$$

Tokrat dobimo v neskončnosti še eno dodatno točko, in sicer $T = [1 : 0 : 0]$.

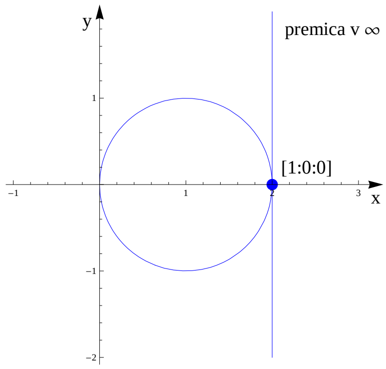




Če na to stožnico pogledamo iz različnih zornih kotov, dobimo različne slike na zaslonih. Pri izbiri zaslona $x + z = 2$ tako dobimo krivuljo z enačbo:

$$y^2 = x(2 - x),$$
$$(x - 1)^2 + y^2 = 1,$$

ki pa je v bistvu krožnica. Na tem zaslonu ima standardna premica v neskončnosti enačbo $x = 2$ in se dotika naše krivulje v točki $(2, 0)$, ki je v bistvu točka $T = [1 : 0 : 0]$. Iz tega zornega kota dobro vidimo, da je premica v neskončnosti tangenta na našo parabolo, čeprav na začetku to ni bilo jasno.



Opomba: Iz zgornjih primerov je razvidno, da v projektivni ravnini krožnice, elipse, parabole in hiperbole vse predstavljajo isto stožnico, ki pa jo opazujemo iz različnih zornih kotov. V projektivni ravnini namreč do projektivne ekvivalence natanko obstaja le en tip neizrojenih stožnic. V afini in evklidski ravnini je situacija drugačna. Tam z izometrijami oziroma afinimi transformacijami ne moremo preslikati elipse v parabolo ali hiperbolo. □

(3) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica $\mathcal{S} = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

(a) Izračunaj polare točk $A = [0 : 0 : 1]$, $B = [-1/2 : 0 : 1]$, $C = [0 : 1 : 1]$ in $D = [1 : 1 : 1]$ glede na stožnico $\mathcal{S}$.

(b) Poišči pola premic $p = \{[x : y : z] \,|\, x - z = 0\}$ in $q = \{[x : y : z] \,|\, x = 0\}$ glede na $\mathcal{S}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali geometrijska opisa polare in pola glede na stožnico v projektivni ravnini.

Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna, neizrojena stožnica v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ in M simetrična 3×3 matrika, ki ji pripada. Nadalje naj bo $A \in P(\mathbb{R}^3)$ poljubna točka in $a \in \mathbb{R}^3$ poljuben vektor na premici skozi izhodišče, ki določa točko A. *Polara* točke A glede na stožnico $\mathcal{S}$ je projektivna premica

$$p_A = \{[x : y : z] \,|\, \langle x, Ma \rangle = 0\}.$$

Če je p poljubna premica v projektivni ravnini, je njen *pol* tista točka v projektivni ravnini, katere polara je premica p.

(a) Stožnici $\mathcal{S} = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ pripada simetrična matrika

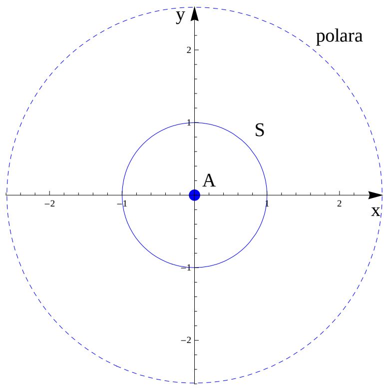
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Polara točke $A = [0 : 0 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:

Pri računanju polare v bistvu iščemo ortogonalni komplement vektorja Ma v $\mathbb{R}^3$. Tako dobimo ravnino v $\mathbb{R}^3$ (vektor Ma je njena normala), ki določa polaro v projektivni ravnini. V našem primeru je $Ma = (0, 0, -1)$, zato je

$$p_A = \{[x : y : z] \mid z = 0\}.$$

Polara točke A je torej premica v neskončnosti.

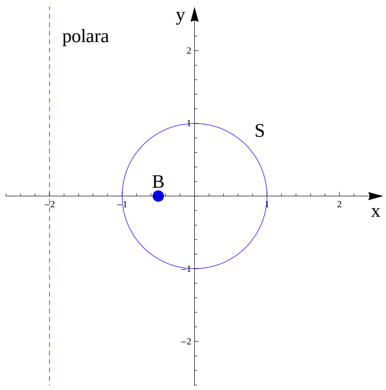


Polara točke $B = [-1/2 : 0 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:

Sedaj je $Mb = (-1/2, 0, -1)$, zato je

$$p_B = \{[x : y : z] \mid \tfrac{x}{2} + z = 0\}.$$

Na zaslonu $z = 1$ ima polara točke B enačbo $x = -2$.

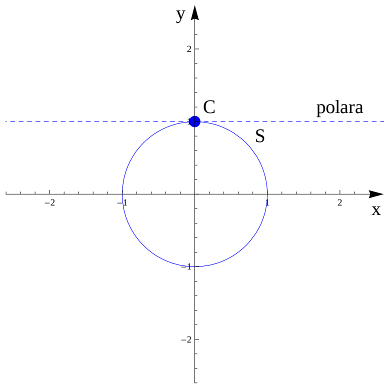


Polara točke $C = [0 : 1 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:

V tem primeru je $Mc = (0, 1, -1)$, od koder dobimo

$$p_C = \{[x : y : z] \mid y - z = 0\}.$$

Na zaslonu $z = 1$ ima polara točke C enačbo $y = 1$. Vidimo, da je polara v tem primeru kar tangenta na krožnico skozi točko C.

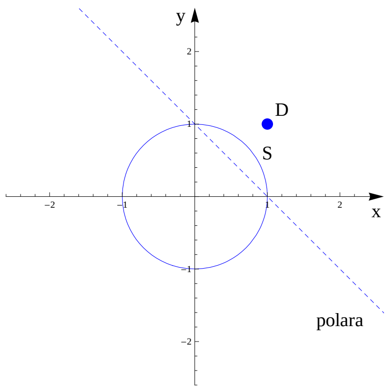


<u>Polara točke $D = [1 : 1 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:</u>

Sedaj imamo $Md = (1, 1, -1)$. Od tod sledi

$$p_D = \{[x : y : z] \,|\, x + y - z = 0\}.$$

Na zaslonu $z = 1$ lahko polaro točke D podamo z enačbo $x + y = 1$.



(b) Sedaj bomo imeli dano neko premico v projektivni ravnini, iskali pa bomo točko, katere polara je ta premica. Denimo, da je premica p v $P(\mathbb{R}^3)$ določena z neko ravnino v $\mathbb{R}^3$ z normalo n. Potem je pol A premice p določen z enačbo

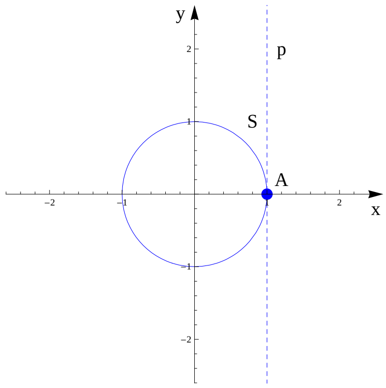
$$Ma = n.$$

<u>Pol premice $p = \{[x : y : z] \,|\, x - z = 0\}$ glede na $\mathcal{S}$:</u>

Iščemo vektor a, ki reši enačbo $Ma = (1, 0, -1)$, oziroma:

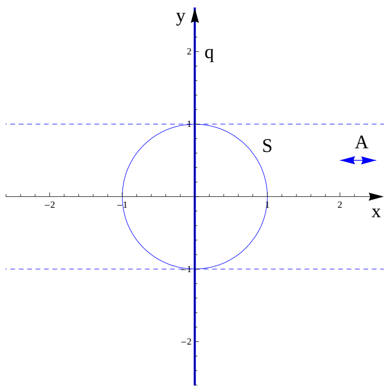
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi, da je pol premice p točka $A = [1 : 0 : 1]$. Vidimo, da premica p vsebuje svoj pol. To se zgodi natanko takrat, ko je premica tangentna na stožnico, pol pa je v tem primeru kar dotikališče premice in stožnice.

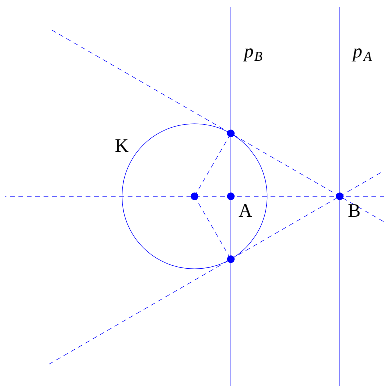


<u>Pol premice $q : \{[x : y : z] \mid x = 0\}$ glede na $\mathcal{S}$</u>:

Sedaj iščemo vektor a, ki reši enačbo $Ma = (1, 0, 0)$, oziroma $(x, y, -z) = (1, 0, 0)$. Pol premice q je točka $A = [1 : 0 : 0]$, ki leži na premici v neskončnosti. Točka A je presečišče tangent na stožnico $\mathcal{S}$ v presečiščih premice q in stožnice $\mathcal{S}$.



<u>Opomba</u>: Pojma polare in pola po naši definiciji sta posplošitvi pojmov polare in pola glede na krožnico v evklidski ravnini. Denimo, da sta A in B inverzni točki glede na krožnico K. Potem gre polara točke A skozi točko B in je pravokotna na zveznico točk A in B. Analogno velja tudi za polaro točke B. Polara točke B seka krožnico K natanko v dotikališčih tangent na K, ki potekata skozi B.



$\square$

(4) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \,|\, -x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2 = 0\}.$$

(a) Določi polaro točke $A = [0 : 1 : 0]$ glede na $\mathcal{S}$.

(b) Določi pol premice $p = \{[x : y : z] \,|\, x + y + z = 0\}$ glede na $\mathcal{S}$.

(c) Ali je premica $q = \{[x : y : z] \,|\, x + 2y + z = 0\}$ tangentna na stožnico $\mathcal{S}$?

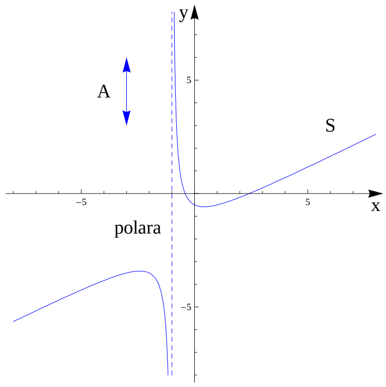
Rešitev: Stožnici $\mathcal{S} = \{[x : y : z] \,|\, -x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2 = 0\}$ pripada simetrična matrika

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Polara točke $A = [0, 1, 0]$ je premica

$$p_A = \{[x : y : z] \,|\, x + z = 0\}.$$

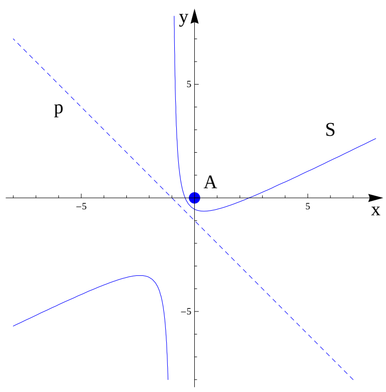
Ker točka A leži na stožnici (v neskončnosti), je polara točke A tangenta na stožnico v projektivni ravnini. Na zaslonu $z = 1$ pa polara sovpada z asimptoto hiperbole.



(b) Pol premice p mora rešiti enačbo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

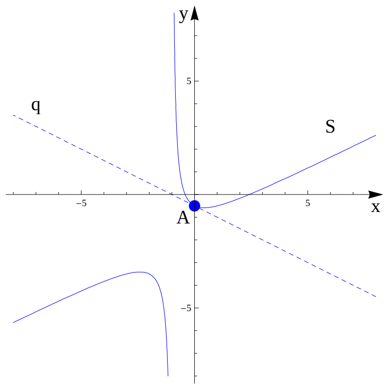
kar pomeni, da je pol premice p točka $A = [0 : 0 : 1]$.



(c) Za testiranje, ali je dana premica tangentna na stožnico, imamo na voljo dokaj preprost kriterij. Premica je namreč tangentna na stožnico natanko takrat, ko vsebuje svoj pol. Pol premice q zadošča enačbi

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

od koder sledi, da je pol točka $A = [0 : -1 : 2]$. Preverimo lahko, da točka A leži na premici q, kar pomeni, da je q tangentna na stožnico $\mathcal{S}$.



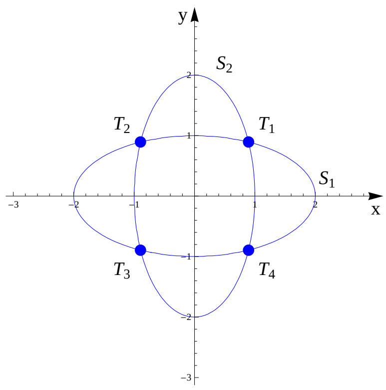
□

(5) Parametriziraj šop stožnic, ki ga določata stožnici:

$$\mathcal{S}_1 = \{[x : y : z] \,|\, \tfrac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 0\},$$
$$\mathcal{S}_2 = \{[x : y : z] \,|\, x^2 + \tfrac{y^2}{4} - z^2 = 0\}$$

ter poišči vse izrojene stožnice v tem šopu.

Rešitev: Poglejmo si najprej skici obeh stožnic na zaslonu $z = 1$.



Presečišča obeh stožnic zadoščajo sistemu enačb:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$
$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,$$

katerega rešitve so $T_1\left(\sqrt{\frac{4}{5}},\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$, $T_2\left(-\sqrt{\frac{4}{5}},\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$, $T_3\left(-\sqrt{\frac{4}{5}},-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$ in $T_4\left(\sqrt{\frac{4}{5}},-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$.
Označimo z M_1 in M_2 matriki, ki pripadata stožnicama $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$. Zanimala nas bo družina stožnic, ki potekajo skozi te štiri točke. Tej družini rečemo šop stožnic, ki ga določata $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$, stožnice v tej družini pa lahko opišemo z matrikami

$$M = \alpha M_1 + \beta M_2,$$

kjer je $[\alpha : \beta] \in P(\mathbb{R}^2)$ (večkratniki matrike M namreč določajo isto stožnico v $P(\mathbb{R}^3)$).
V našem primeru dobimo

$$M = \alpha M_1 + \beta M_2 = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{4}+\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\frac{\beta}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha-\beta \end{bmatrix}.$$

Izrojene so tiste stožnice v tem šopu, katerih pripadajoče matrike niso obrnljive. To pomeni, da imajo ničelno determinanto, od koder sledi

$$\det(M) = \left(\frac{\alpha}{4}+\beta\right)\left(\alpha+\frac{\beta}{4}\right)(-\alpha-\beta) = 0.$$

Ker nas zanima samo razmerje α in β in ker rešitve $[0:0]$ ne upoštevamo, lahko postavimo $\alpha = 1$. V danem šopu so potem tri izrojene stožnice.

$\underline{\alpha = 1,\ \beta = -1/4}$:
V tem primeru dobimo izrojeno stožnico

$$\mathcal{S}_{-1/4} = \left\{ [x:y:z] \;\middle|\; \frac{15}{16}y^2 - \frac{3}{4}z^2 = 0 \right\}.$$

Na zaslonu $z = 1$ dobimo unijo dveh vzporednih premic

$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}.$$

$\underline{\alpha = 1,\ \beta = -1}$:
Sedaj je izrojena stožnica

$$\mathcal{S}_{-1} = \left\{ [x:y:z] \;\middle|\; -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0 \right\},$$

ki je na zaslonu $z = 1$ unija simetral kvadrantov

$$y = \pm x.$$

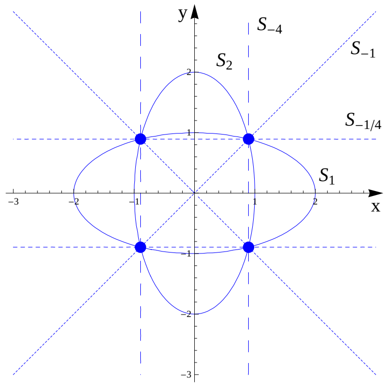
$\underline{\alpha = 1,\ \beta = -4}$:
V tem primeru dobimo izrojeno stožnico

$$\mathcal{S}_{-4} = \left\{ [x:y:z] \;\middle|\; \frac{15}{16}x^2 - \frac{3}{4}y^2 = 0 \right\},$$

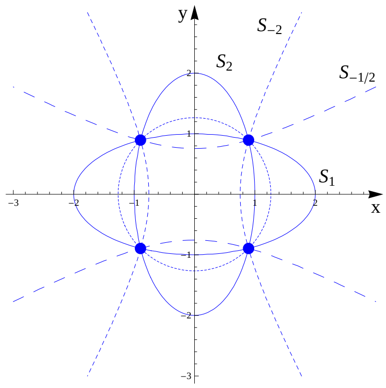
ki je na zaslonu $z = 1$ unija premic

$$x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}.$$

Poglejmo si sliko stožnic $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ ter vseh treh izrojenih stožnic.



Zanimivo je še pogledati, kako se spreminja oblika stožnice, ko spreminjamo parameter β.



Pri dani vrednosti β dobimo stožnico, ki je na zaslonu $z = 1$ dana z enačbo

$$\left(\frac{1}{4} + \beta\right) x^2 + \left(1 + \frac{\beta}{4}\right) y^2 = 1 + \beta.$$

Stožnica $\mathcal{S}_1$ ustreza vrednosti $\beta = 0$, stožnica $\mathcal{S}_2$ pa vrednosti $\beta = \infty$. Sedaj bomo opisali, kako se spreminja oblika stožnice, ko β preteče realna števila.

Pri vrednostih $\beta \to -\infty$ dobimo elipse, ki od zunaj aproksimirajo elipso $\mathcal{S}_2$. Ko nato β narašča od $-\infty$ do -4, dobimo elipse, ki so čedalje bolj raztegnjene v navpični smeri. Pri $\beta = -4$ se elipsa pretrga, nastaneta pa dve navpični premici, ki tvorita prvo izrojeno stožnico iz šopa. Za parametre $-4 < \beta < -1$ dobimo vodoravne hiperbole, katerih asimptote so sprva skoraj navpične, nato pa se približujejo k simetralam kvadrantov, ki ustrezata drugi izrojeni stožnici pri $\beta = -1$. Na intervalu $-1 < \beta < -1/4$ dobimo navpične hiperbole, ki se pri vrednosti $\beta = -1/4$ izrodijo v dve vodoravni premici. Pri vrednostih $-1/4 < \beta < 0$ pridejo na vrsto elipse, ki se čedalje bolj od zunaj prilegajo elipsi $\mathcal{S}_1$, ki ustreza parametru $\beta = 0$. Do vrednosti $\beta = 1$ se nato elipse približujejo krožnici, ki poteka skozi štiri skupne točke, za parametre $\beta > 1$ pa dobimo elipse, ki čedalje bolje od znotraj aproksimirajo elipso $\mathcal{S}_2$. $\square$

(6) Poišči stožnico v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$, ki vsebuje točke $T_1 = [0 : 0 : 1]$, $T_2 = [1 : 0 : 1]$, $T_3 = [1 : 1 : 1]$, $T_4 = [0 : 1 : 1]$ in $T_5 = [2 : 3 : 1]$.

Rešitev: Kot smo videli pri prejšnji nalogi, štiri točke še ne določajo natanko stožnice v ravnini. Če pa imamo pet točk v splošni legi, je stožnica z njimi natanko določena. Začeli bomo s splošno enačbo stožnice

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

Če v to enačbo vstavimo danih pet točk, dobimo sistem petih enačb za šest neznank. Ker je enačba homogena, lahko eno neničelno neznanko fiksiramo, tako da ostanemo s samo petimi neznankami, ki jih nato dobljeni sistem natanko določa. V našem primeru dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} f &= 0, \\ a + 2d + f &= 0, \\ a + 2b + c + 2d + 2e + f &= 0, \\ c + 2e + f &= 0, \\ 4a + 12b + 9c + 4d + 6e + f &= 0. \end{aligned}$$

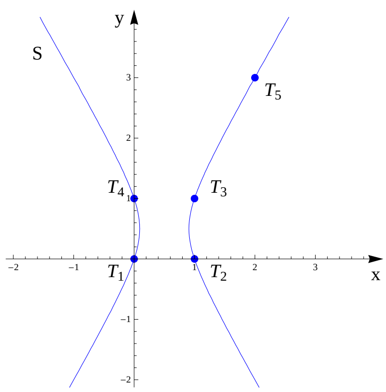
Fiksirajmo recimo $a = 1$. Potem sledi $b = 0$, $c = -1/3$, $d = -1/2$, $e = 1/6$ in $f = 0$, od koder sledi, da je iskana stožnica

$$\mathcal{S} = \left\{ [x : y : z] \,\middle|\, x^2 - \frac{y^2}{3} - xz + \frac{yz}{3} = 0 \right\}.$$

Zožitev te stožnice na afino ravnino ima enačbo:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{y^2}{3} - x + \frac{y}{3} &= 0, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Gre za hiperbolo s središčem v točki $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



$\square$