Vaje

1. Za cela števila x, y in z vemo, da
$$6|(x+y+z) \quad \text{in} \quad 6|(x^2+y^2+z^2)\ .$$
Pokaži, da tedaj
$$6|(x^n+y^n+z^n)$$
za vsako naravno število n.

2. Pokaži, da $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ ni racionalno število za nobeno naravno število n.

3. Poišči vsa naravna števila x, y in z, za katera je vrednost izraza
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$
naravno število.

4. Pokaži, da za člene Fibonaccijevega zaporedja in $n>1$ velja:
$$F_{n+1}F_{n-1}+(-1)^{n+1}=F_n^2.$$

5. Pokaži, da za matriko
$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$
velja
$$A^n=\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}.$$
Kaj pove determinanta matrike A^n?

6. Brez uporabe eksplicitne formule za F_n pokaži, da je
$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\tau,$$
kjer je τ pozitivna rešitev enačbe $\tau^2=\tau+1$.

7. Pokaži, da sta zaporedna člena Fibonaccijevega zaporedja tuji števili.

8. Izpelji splošno formulo za n-to d-kotno število:

$$p_d(n) = \tfrac{1}{2}((d-2)n^2 + (4-d)n).$$

9. Pokaži, da je vsaka primitivna pitagorejska trojica (x, y, z) oblike

$$x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2,$$

pri čemer sta si m in n tuji števili.

10. S Saundersovim in Evklidovim algoritmom reši diofantsko enačbo

$$4928x - 1771y = \gcd(4928, 1771).$$

11. Pokaži, da sta števili $22n + 7$ in $33n + 10$ tuji za vsako naravno število n.

12. Pokaži, da je kub vsakega števila ene od oblik $9k - 1$, $9k$ ali $9k + 1$.

13. Reši diofantske enačbe:

    (a) $y^3 = 7x^3 + 2$
    (b) $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0$
    (c) $x! + y! = z!$
    (d) $2x^2 - 5y^2 = 7$

14. Pokaži, da velja:

$$2^{\omega(n)} \le \tau(n) < 2\sqrt{n}\ .$$

15. Za katera naravna števila n velja

$$\prod_{d|n} d = n^2\ ?$$

16. Pokaži, da število 12 496 generira socialno verigo.

17. Pokaži, da je praštevil, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 3, neskončno.

18. Pokaži, da za $s > 1$ velja

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ praštevilo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

19. Pokaži, da za $s > 1$ velja

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\ .$$

20. Izračunaj vsoto recipročnih vrednosti vseh deliteljev popolnega števila.

21. Pokaži, da se vsako sodo popolno število konča na 6 ali 8.

22. Naj bo n popolno število. Pokaži, da je vsota pravih deliteljev števila n^2 strogo večje od n^2.

    Pri tem *pravi delitelj* števila m pomeni pozitivni delitelj števila m, ki je strogo manjši od m.

23. Naj bo $n > 1$ naravno število in

$$p = 3 \cdot 2^n - 1,\ q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1,\ r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1.$$

    Če so p, q in r praštevila, pokaži, da sta števili $2^n pq$ in $2^n r$ prijateljski.

    Pokaži še, da prijateljski par 1184, 1210 ni generiran s tem pravilom.

24. Pokaži, da 7 deli $111^{333} + 333^{111}$.

25. Pokaži, da je število

$$53^{103} + 103^{53}$$

    deljivo z 39.

26. Poišči zadnji dve cifri števila 4444^{4444}.

27. Reši sistem:

$$x \equiv 2 \pmod 3,\ x \equiv 3 \pmod 4,\ x \equiv 4 \pmod 5,$$

$$x \equiv 5 \pmod 6,\ x \equiv 1 \pmod 7.$$

28. Kdaj je:

    (a) $\varphi(n)$ sodo število?
    (b) $\varphi(n) = \frac{1}{2}n$?
    (c) $\varphi(n) = 10$?

(d) $\varphi(n) = 12$?

(e) $\varphi(n) = 60$?

29. Med naravnimi števili od 1 do n je m tujih proti n. Izračunaj vsoto vseh naravnih števil, manjših od n, ki so tuja n. Rezultat zapiši kot funkcijo m in n.

30. Za katera naravna števila x velja
$$x^{341} \equiv 127 \pmod{893} \ ?$$

31. Za katera naravna števila x je
$$x^3 + 3x^2 + 31x + 23 \equiv 0 \pmod{35} \ ?$$

32. Poišči vse rešitve enačbe
$$n^3 + 2n - 3 \equiv 0 \pmod{45}.$$

33. Za katera naravna števila x je
$$53x \equiv 282 \pmod{11^3} \ ?$$

34. Elementom obsega $\mathbb{Z}_{37}$ priredi abecedo z ločili in izberi obrnljivo matriko A velikosti 3×3 z elementi iz $\mathbb{Z}_{37}$. Nato s pomočjo Hillovega šifriranja zakodiraj izbrano besedilo. Poišči še A^{-1} in z dešifriranjem preveri pravilnost računov.

35. Če je $p > 2$ praštevilo, pokaži, da p^3 deli $(p!)^2 - p^2$.

36. Določi največji skupni delitelj $n! + 1$ in $(n+1)!$.

37. Naslednja števila zapiši kot verižni ulomek: $\frac{73}{46}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{n^2-1}$.

38. Reši Pellovi enačbi:

    (a) $x^2 - 29y^2 = 1$,

    (b) $x^2 - 21y^2 = 1$.

39. Prijazna zdravnica Diana živi na tisti strani ulice, ki ima sode hišne številke. Ko je stopila iz hiše, ji je levi sosed povedal nenavadno dejstvo, da je vsota vseh hišnih številk na njeni levi enaka vsoti hišnih številk na njeni desni. Ugotovi njeno hišno številko, če veš, da ob ulici ni več kot 80 hiš.

40. Stranice trikotnika s celoštevilsko ploščino so zaporedna naravna števila $n-1$, n in $n+1$.

    (a) Pokaži, da mora biti število $3(n^2-4)$ sodo in popoln kvadrat, n pa mora biti oblike $n = 2x$, $x \in \mathbb{N}$.

    (b) Pokaži, da za število x iz točke (a) obstaja naravno število y, za katero velja $x^2 - 3y^2 = 1$.

    (c) Poišči dolžine stranic vseh takšnih trikotnikov, ki imajo najkrajšo stranico dolgo med 100 in 200.

41. Če je rešljiva Pellova enačba $x^2 - dy^2 = -1$, pokaži, da morajo biti vsa praštevila, ki delijo d oblike $4k+1$.

42. Poišči vrednost števila $[1; \overline{3, 5}]$.

43. Poišči posplošen verižni ulomek za $\sqrt{n^2+m}$, kjer je $m \leq 2n$.

44. Katera trikotna števila so popolni kvadrati?

45. Ali je kvadratna sredina prvih n naravnih števil kdaj celo število?

46. Reši enačbo $x^2 - 7y^2 = 2$.