

0.1 Naloge

Naloga 0.1.1 Reši naslednje diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami:

i. $xyy' = 1 - x^2$

ii. $y'tg x - y = a$

iii. $e^{-s} \left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$

iv. $y' \sin x = y \ln y, \quad y(\pi/2) = e$

v. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y(0) = 1$

Naloga 0.1.2 Poišči rešitve naslednjih linearnih diferencialnih enačb:

i. $y' + 2y = 4x$

ii. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

iii. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

iv. $y' + y = \cos x$

v. $xy' + y - e^x = 0, \quad y(a) = b$

vi. $xy' - \frac{y}{x+1} = x - 1, \quad y(1) = 1$

Naloga 0.1.3 Reši naslednje Bernoullijeve enačbe:

i. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{2yx^4}$

ii. $y^2y' + x^2y^3 = x^2$

iii. $y' + y = xy^{2/3}$

iv. $yy' + xy^2 - x = 0, \quad y(0) = -1$

v. $xy' + 3y = x^3y^2, \quad y(1) = 1$

Naloga 0.1.4 Poišči splošno rešitev linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti:

i. $y'' + y' - 2y = 0$

ii. $y'' - 4y' = 0$

iii. $3y'' - 2y' - 8y = 0$

iv. $y'' + 6y' + 13y = 0$

v. $y'' - 2y' + y = 0$

Naloga 0.1.5 Poišči partikularne rešitve enačb, ki zadoščajo danim začetnim pogojem:

i. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 10$

ii. $4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

Naloga 0.1.6 Reši naslednje nehomogene enačbe:

- i. $2y'' + y' - y = 2e^x$
- ii. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$
- iii. $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2} \cos 2x$
- iv. $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$
- v. $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch} x$
- vi. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$
- vii. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$
- viii. $y'' + y = -8 \cos 3x$

Naloga 0.1.7 Poišči partikularne rešitve nehomogenih enačb, ki zadoščajo danim začetnim pogojem:

- i. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-3x/2}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -11/2$
- ii. $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
- iii. $y'' + y + \sin 2x = 0$, $y(\pi) = y'(\pi) = 1$

Naloga 0.1.8 Reši naslednje sisteme linearnih enačb:

- i. $\frac{dx}{dt} = y - 7x$, $\frac{dy}{dt} = -2x - 5y$
- ii. $\frac{dx}{dt} = 2x + y$, $\frac{dy}{dt} = 3x + 4y$
- iii. $\frac{dx}{dt} = x - 3y$, $\frac{dy}{dt} = 3x + y$
- iv. $\frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t$, $\frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}$

Naloga 0.1.9 V posodi je na začetku 100 l slane vode, ki vsebuje 0.1 kg soli na liter.

- i. V posodo doteka vsako minuto 5 l slane vode, ki vsebuje 0.2 kg soli na liter. Ravno toliko mešanice odteka. Koliko soli je v posodi ob času t ? Kdaj bo v posodi 15 kg soli?
- ii. V posodo doteka vsako minuto 5 l čiste vode. Kdaj bo v posodi 5 kg soli?

Naloga 0.1.10 Neke radioaktivne snovi je v 50 letih razpadlo 25 %. Določi, koliko jo je v času t in koliko je razpolovna doba te snovi.

Naloga 0.1.11 Torij 234 je radioaktiven izotop. Od enega grama ga v enem tednu ostane le še 0.80 g.

- i. Poišči količino tega izotopa v odvisnosti od časa.
- ii. Poišči razpolovno dobo.
- iii. Koliko tega izotopa ostane po 10 tednih?

Naloga 0.1.12 Cipresna vejica, najdena v grobu v Egiptu vsebuje, še 55 % ogljika C-14 od tistega, ki ga najdemo v živečem drevesu. Koliko je star grob? Razpolovna doba ogljika C-14 je približno 5600 let.

Naloga 0.1.13 V gramu ogljika iz jamskih slik v jami Lascaux v Franciji se zgodi 1 radioaktivni razpad na minuto. Koliko so stare slike, če je v gramu današnjega lesa 6.68 razpadov ogljika na minuto?

Naloga 0.1.14 Predpostavimo, da se količina alkohola v krvi zmanjšuje za 10 % na uro. Koliko časa po tem, ko smo imeli v krvi 0.1 % alkohola, bomo imeli 0.05 % alkohola v krvi?

Naloga 0.1.15 Pivo, ki ga damo iz hladilnika, se z začetne temperature 4 °C v 10 minutah ogreje na 7 °C. Temperatura v sobi je 25 °C. Koliko bo temperatura piva po 20 minutah?

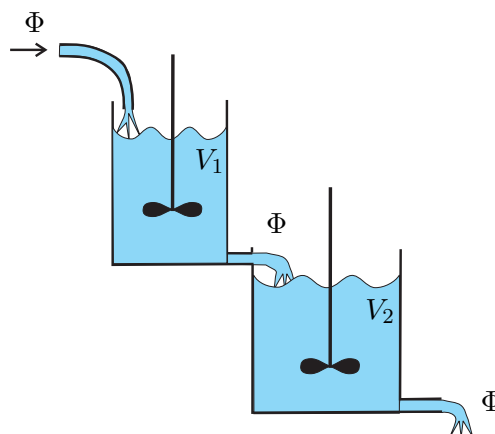
Naloga 0.1.16 Peč za gretje sobe se je pokvarila točno opolnoči. Temperatura v sobi je bila takrat 22 °C. V dveh urah je temperatura padla na 15 °C. Kolikšna bo temperatura v sobi ob 8 zjutraj, ko bo prišel serviser, če je temperatura zunaj −10 °C?

Naloga 0.1.17 Eden najenostavnejših modelov, ki opisuje količino zdravila v krvi, je podan z diferencialno enačbo

$$\frac{dC}{dt} = a - bC(t),$$

kjer sta a in b pozitivni konstanti, $C(t)$ pa označuje koncentracijo zdravila v krvi. Predpostavimo, da v času 0 v krvi ni zdravila. Poišči limitno koncentracijo zdravila v krvi, ko gre $t \rightarrow \infty$. Čez koliko časa koncentracija doseže polovico limitne koncentracije?

Naloga 0.1.18 Dve posodi velikosti V_1 in V_2 sta povezani, kot je prikazano na sliki. Toliko tekočine, kolikor jo prihaja v prvo posodo, potem izteka iz nje v drugo in iz druge ven. (Recimo, da je to 0.1 l na uro.) V začetku (v času 0) je v prvi posodi a % raztopina soli, v drugi posodi pa je čista voda. V prvo posodo doteka čista voda. Kako se s časom spreminja koncentracija soli v drugi posodi. (Lahko si mislite, da so dotočna cev usta, prva posoda želodec, druga posoda krvni obtok in odtočna cev jetra.)



Naloga 0.1.19 Ob treh popoldne je Miha dal pločevinko cockte v hladilnik. Temperatura v sobi je vseskozi 25 °C. Temperatura v hladilniku je 4 °C. Petnajst minut kasneje je bila temperatura cockte v hladilniku 20 °C. Nekaj kasneje jo je vzel iz hladilnika in ob štirih je bila njena temperatura spet 20 °C. Kdaj jo je vzel iz hladilnika?