Diskretno modeliranje 2013/14

1. izpit

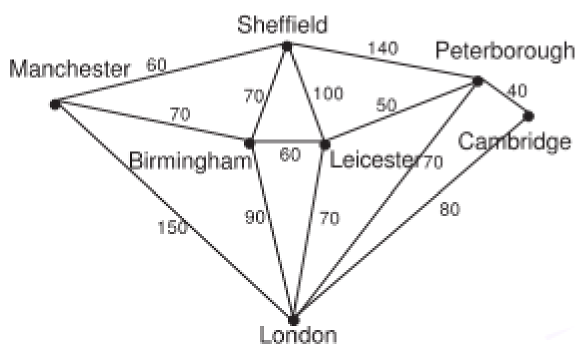
28. 1. 2014

1. Podravka proizvaja omaki za zrezke, začinjeno – diablo in nezačinjeno – rdeči baron. Omaki naredimo z mešanjem sestavin A in B. V receptu so dopuščena odstopanja:

   - rdeči baron mora vsebovati največ 75% sestavine A,
   - diablo mora vsebovati najmanj 25% sestavine A in najmanj 50% sestavine B.

   Nakupijo lahko največ 400 litrov sestavine A in 300 litrov sestavine B. Podravka lahko proda vse po cenah ceni 3,35 € na 10 litrov za rdeči baron in 2,85 € na 10 litrov za diablo. Proizvodnja 10 litrov diabla stane 1,6 €, proizvodnja 10 litrov rdečega barona stane 2,05 €. Poišči maksimalni možen dobiček in določi optimalno sestavo omak.

2. Dano je železniško omrežje prikazano na spodnji sliki:



.

   Poišči najkrajšo možno pot med Manchestrom in Cambridgeom. Ali se kaj spremeni, če nas vsako prestopanje v križišču stane 20? Radi bi čim ceneje obiskali vsa mesta in začeli in končali v Manchestru. Poišči opis poti.

3. Na permutacijah bomo definirali vrstni red z najmanjšim spreminjanjem. Dve permutaciji π in π' sta sosedni, če lahko eno iz druge dobimo z zamenjavo sosednih elementov. To je, če velja

$$\pi'[j] = \begin{cases} \pi[j+1], \text{ če } j = i \\ \pi[j-1], \text{ če } j = i+1 \\ \pi[j], \text{ drugače} \end{cases}$$

   za vsak i.

   Poglejmo si, kako lahko generiramo permutacije po vrsti. Začnemo s $T^1 = [1]$. Na drugem koraku naredimo dve kopije T^1 in dodamo 2, dobimo $T^2 = [[1, \mathbf{2}], [\mathbf{2}, 1]]$. V tretjem koraku naredimo tri kopije vsakega izmed elementov T^2 in vrinemo 3 izmenično gleda na originalni indeks kopije, enkrat na začetek in enkrat na konec,

$$T^3 = [[1, 2, \mathbf{3}], [1, \mathbf{3}, 2], [\mathbf{3}, 1, 2], [\mathbf{3}, 2, 1], [2, \mathbf{3}, 1], [2, 1, \mathbf{3}]] , ...$$

Pokaži, da lahko rang permutacije $\pi = [\pi[1], \dots, \pi[n]]$ izračunamo kot

$$\operatorname{rank}(\pi) = n * \operatorname{rank}(\pi') + \epsilon,$$

kjer je $\pi' = [\pi[1], \dots, \pi[k-1], \pi[k+1], \dots, \pi[n]]$, $\pi[k] = n$ in

$$\epsilon = \begin{cases} n-k, & \text{če je } \operatorname{rank}(\pi', n-1) \text{ sod,} \\ k-1, & \text{če je } \operatorname{rank}(\pi', n-1) \text{ lih.} \end{cases}$$

Mesto k predstavlja pozicijo števila n v permutaciji. Za lažjo predstavo zgeneriraj še vrstni red za primer $n = 4$. Ilustrirajmo na primeru:

$$\begin{gathered} \operatorname{rank}([3, \mathbf{4}, 1, 2]) = 4 \cdot \operatorname{rank}([\mathbf{3}, 1, 2]) + 4 - 2 = 10 \quad (n-k) \\ \operatorname{rank}([\mathbf{3}, 1, 2]) = 3 \cdot \operatorname{rank}([1, \mathbf{2}]) + 3 - 1 = 2 \quad (n-k) \\ \operatorname{rank}([1, \mathbf{2}]) = 2 \cdot \operatorname{rank}([1]) + 2 - 2 = 0 \end{gathered}$$

Zgornji postopek implementiraj v Pythonu najprej rekurzivno in nato še iterativno. Kar pomeni $[3, 4, 1, 2], \operatorname{rank}([1]) = 0$, $[3, 4, 1, 2], \operatorname{rank}([1, \mathbf{2}]) = 0$, $[3, 4, 1, 2]$, $\operatorname{rank}([\mathbf{3}, 1, 2]) = 2$ in $[3, 4, 1, 2], \operatorname{rank}([3, \mathbf{4}, 1, 2]) = 10$.

$$T^4 = \left[\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 2 & & 3 & 4 \\
 & 1 & & 2 & 4 & 3 & \\
 & 1 & 4 & 2 & & 3 & \\
4 & 1 & & 2 & & 3 & \\ \cline{2-6}
4 & 1 & & 3 & & 2 & \\
 & 1 & 4 & 3 & & 2 & \\
 & 1 & & 3 & 4 & 2 & \\
 & 1 & & 3 & & 2 & 4 \\ \cline{2-6}
 & 3 & & 1 & & 2 & 4 \\
 & 3 & & 1 & 4 & 2 & \\
 & 3 & 4 & 1 & & 2 & \\
4 & 3 & & 1 & & 2 & \\ \cline{2-6}
4 & 3 & & 2 & & 1 & \\
 & \color{blue}\mathbf{3} & \color{blue}\mathbf{4} & \color{blue}\mathbf{2} & & \color{blue}\mathbf{1} & \\
 & 3 & & 2 & 4 & 1 & \\
 & 3 & & 2 & & 1 & 4 \\ \cline{2-6}
 & 2 & & 3 & & 1 & 4 \\
 & 2 & & 3 & 4 & 1 & \\
 & 2 & 4 & 3 & & 1 & \\
4 & 2 & & 3 & & 1 & \\ \cline{2-6}
4 & 2 & & 1 & & 3 & \\
 & 2 & 4 & 1 & & 3 & \\
 & 2 & & 1 & 4 & 3 & \\
 & 2 & & 1 & & 3 & 4
\end{array} \right].$$

$$T^3 = \left[\begin{array}{ccccc}
 & 1 & & 2 & 3 \\
 & 1 & 3 & 2 & \\
3 & 1 & & 2 & \\
3 & 2 & & 1 & \\
 & 2 & 3 & 1 & \\
 & 2 & & 1 & 3
\end{array} \right].$$