

## Dodatne naloge za 1. kolokvij iz Matematike 3

- (1) Padalec izskoči iz letala in po nekem času, v trenutku  $t = 0$ , ko se giblje s hitrostjo  $15m/s$ , odpre padalo. Od tega trenutka dalje deluje na padalca zračni upor, ki je premosorazmeren kvadratu njegove hitrosti; premosorazmernostni faktor je  $30kg/m$ . Izračunaj hitrost padalca za  $t > 0$ , če veš, da je masa padalca skupaj z vso opremo  $300kg$ ; za pospešek težnosti uporabi približno vrednost  $g = 10m/s^2$ . Kako se obnaša hitrost za velike čase  $t$ ?
- (2) Poišči splošno rešitev enačbe  $(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$  z dvema različnima metodama.
- (3) Poišči družino ortogonalnih trajektorij na dano družino:
  - (a)  $y = 1 - Cx^2$
  - (b)  $(x - C)^2 + y^2 = C^2$
  - (c)  $y = e^{Cx}$
- (4) Poišči vse krivulje, katerih tangenta v točki  $(x, y)$  na krivulji seka ordinatno os v  $3x^2y^3$ . Med vsemi temi krivuljami poišči tisto, katere graf gre skozi točko  $(1, 1)$ .
- (5) Naj bo  $a$  dano število. Poišči vse krivulje, za katere v vsaki točki  $(x, y)$  na krivulji velja: ploščina trikotnika, ki ga omejujejo tangenta na krivuljo v točki  $(x, y)$ , premica, ki povezuje točko  $(x, y)$  z izhodiščem, in  $y$ -os, je enaka  $a$ .
- (6) Pokaži, da ortogonalne trajektorije na družino krivulj  $y = x - 1 + Ce^{-x}$  zadoščajo diferencialni enačbi  $dx + (x - y)dy = 0$  in jih poišči.
- (7) Določi konstanti  $a$  in  $b$  tako, da bo enačba eksaktna in jo reši:

$$(2x + e^{ay})dx + bxe^ydy = 0$$

- (8) Poišči splošno rešitev enačbe

$$(12 + 5xy)dx + (6xy^{-1} + 3x^2)dy = 0,$$

če veš, da ima integrirajoči množitelj oblike  $x^a y^b$  za neka  $a, b$ .

V nalogah 9-26 poišči splošno rešitev dane enačbe. Če so dani začetni pogoji, poišči tudi rešitev, ki zadošča tem pogojem.

- |  |   |
|--|---|
| (9) (a) $x^2y' + y^2x = 2y^2 \ln x$  | (b) $x^2y' + 2xy = \operatorname{sh}(3x)$                     |
| (10) (a) $y' = xe^{-x^3} - 3x^2y, \quad y(0) = 1$  | (b) $x^2(y' - 1) = y(x + y)$                                  |
| (11) (a) $xy' = y + \frac{x^5}{y^3e^x}$  | (b) $(\operatorname{ctg} y + x^2)dx = \frac{x}{\sin^2 y}dy$   |
| (12) (a) $y \cos x dx + (y + 3 \sin x)dy = 0$  | (b) $2xy' = y(10x^3y^4 + 1)$                                  |
| (13) (a) $y' = \frac{y}{x} + 2x + 1$   | (b) $(x^2 + 1)y' = x^2 + 2x(1 - 2y) - 1$                      |
| (14) $y' \sin x + y \cos x = x \sin x, \quad y(\pi/2) = 2$                                   |   |
| (15) $x^2(y' + y^2) = 4(xy - 1)$   |   |
| (16) $(e^t y + te^t y)dt + (te^t + 2)dy = 0, \quad y(0) = -1$                                |   |
| (17) $(2y^2 + 2y + 4x^2)dx + (2xy + x)dy = 0$  |   |
| (18) $x(2x - 1)y' + y^2 - (4x + 1)y + 4x = 0$ (Nasvet: ena rešitev te enačbe je konstantna.) |   |
| (19) (a) $y'' = x \cos^2(y')$  | (b) $y'' + (1 + y^{-1})y'^2 = 0$                              |
| (20) (a) $y'' - y' + y = 4 \sin x + 18e^{2x}$  | (b) $y'' - 4y' + 3y = 2e^{3x} + x \sin(3x) - 2 \cos(3x)$      |
| (21) (a) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} + x^2$  | (b) $y''' + y'' - 2y = xe^x + 1$                              |
| (22) (a) $y'' - 4y' + 4y = x^{-1}e^{2x} - \sin x$  | (b) $y'' - 2y' + y = x^{3/2}e^x + 2$                          |
| (23) (a) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos^{-3} x$   | (b) $y''' - 3y'' + 4y = 3e^{2x} - xe^x$                       |
| (24) (a) $x^2y'' - y = \ln^2 x$  | (b) $xy'' + 3y' - 3\frac{y}{x} = x^2 + \frac{\ln x}{x^3}$     |
| (25) (a) $x^2y'' + xy' + y = \ln x \sin(\ln x)$  | (b) $x^2y'' + xy' - y = x^3e^{3x} + 6/x$                      |
| (26) (a) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4(2 + \sin x)$  | (b) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^4 \operatorname{sh} x$ |