

3. kolokvij iz LINEARNE ALGEBRE

9. 4. 1998

1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njene lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje. Ali je A podobna diagonalni matriki?

2. Dana je matrika $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ in množica

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{2,2}; AJ + J^T A^T = 0\}.$$

Pokaži, da je U vektorski podprostor v prostoru vseh realnih 2×2 matrik. Poišči njegovo bazo in jo dopolni do baze prostora $\mathbb{R}^{2,2}$.

3. Dani so vektorji

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Naj bo \mathcal{M} množica vseh preslikav $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, za katere velja

$$Ax_1 = y_1, \quad Ax_2 = y_2.$$

- (a) Ali obstaja v \mathcal{M} kakšna linearna preslikava?
 - (b) Ali obstaja v \mathcal{M} kakšna surjektivna linearna preslikava?
 - (c) Ali obstaja v \mathcal{M} kakšna injektivna linearna preslikava?
 - (d) Ali obstaja v \mathcal{M} kakšna linearna preslikava, ki ima rang 2?
- Odgovore utemelji.

4. Dana je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x-2)(p'(x) + xp(1)).$$

Pokaži, da je \mathcal{A} linearna preslikava in poišči njeno matriko v bazi $\{1, x, x^2\}$. Določi še matriko za

$$\mathcal{A} : (\mathbb{R}_2[x], B_1) \rightarrow (\mathbb{R}_2[x], B_2)$$

v bazah

$$B_1 = \{1, x-1, x^2-3\}, \quad B_2 = \{x^2-2x, x-2, 1\}.$$

Kolikšen je rang \mathcal{A} ?