

3. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

24. MAREC 2005

1. Dan je vektorski podprostor

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[x], p(1) = p(-1), p''(0) = 2p(1)\}$$

v prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3.

(a) [15] Poišči kakšno bazo prostora U in določi $\dim U$.

(b) [10] Naj bo $V = \mathcal{L}\{x^2, 1\}$. Poišči bazi prostorov $U + V$ in $U \cap V$.

2. Dana sta vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Naj bo $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslikava dana s predpisom

$$A\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{b} + 2\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a}.$$

(a) [5] Pokaži, da je A linearna preslikava.

(b) [15] Za

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

poišči matriko za A v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 .

(c) [5] Pri istih vektorjih \vec{a} in \vec{b} poišči kako bazo za sliko preslikave A .

3. [25] Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Določi algebraične in geometrične večkratnosti lastnih vrednosti. Ali je matrika podobna kakšni diagonalni matriki? Če je, kateri?

4. [25] Dani so vektorji

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Linearna preslikava $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deluje takole

$$A\vec{a} = \vec{a} + \vec{b}, \quad A\vec{b} = 2\vec{a}, \quad A\vec{c} = \vec{c}.$$

Poišči matriki za to linearno preslikavo v bazi $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ in v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 .