Poskusni kolokvij iz LINEARNE ALGEBRE

17. marec 2006

1. Dokaži, da je množica

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

vektorski podprostor v prostoru 2×2 matrik. Poišči bazo in dimenzijo za U.

2. Dana sta vektorska podprostora

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[x], p(0) = p'(0) = 0\}$$

$$V = \mathcal{L}in\{x^3 - x + 1, x^3 - x^2, x^2 - x + 1\}$$

v prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3. Poišči baze prostorov U, V, $U+V$ in $U \cap V$.

3. Dana sta vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Naj bo $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslikava dana s predpisom

$$A\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} + 2\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{b}.$$

(a) Pokaži, da je A linearna preslikava.
(b) Za

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

poišči matriko za A v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.
(c) Pri istih vektorjih $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poišči kako bazo za jedro in sliko preslikave A.

4. Dana je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x^2 - 2)\Big(p'(x) + xp(-1)\Big).$$

Poišči njeno matriko v bazah $B_1 = \{x^2, x, 1\}$ za $\mathbb{R}_2[x]$ in $B_2 = \{x^3, x^2, x, 1\}$ za $\mathbb{R}_3[x]$.

5. Naj bo p premica v prostoru $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje točki $(0,0,0)$ in $(1,0,-2)$, in naj bo $\mathcal{A} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje preko premice p. Poišči jedro, sliko, lastne vrednosti in baze pripadajočih lastnih podprostorov preslike $\mathcal{A}$. Poisči še matriko, ki preslikavi $\mathcal{A}$ ustreza v standardni bazi.

6. Linearna preslikava $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - z \\ -x + y - 3z \\ -x - 2z \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči matriko, ki pripada A v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) Poišči matriko, ki pripada A v bazi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

7. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Poišči lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

in določi njihove algebraične in geometrične večkratnosti.