

Vaje iz LINEARNE ALGEBRE

23. maj 2000

1. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

in podprostor

$$U = \mathcal{L}\{x^2 - 1, x^2 - 2x + 1\}.$$

Poišči kako ortonormirano bazo prostora U in jo dopolni do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

2. V prostoru \mathbb{R}^3 z običajnim skalarnim produktom je dan podprostor

$$W = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}.$$

Poišči ortonormirano bazo prostora W . Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ na podprostor W .

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

- (a) Poišči vse vrednosti parametrov a in b tako, da bo matrika sebi adjungirana.
(b) Poišči vse vrednosti parametrov a in b tako, da bo matrika pozitivno definitna.

4. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

Naj bo $A : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava dana s predpisom

$$(Ap)(x) = p'(x) \quad .$$

Določi $A^*(x^2 - x - 1)$.

5. V prostoru \mathbb{R}^2 je dan skalarni produkt

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Poišči matriko preslikave A^* v standardni bazi, če ima preslikava A v standardni bazi matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Dana je matrika

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da predstavlja rotacijo. Izračunaj os in kot rotacije.

7. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da sta lastna vektorja pravokotna v skalarnem produktu

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1\bar{y}_1 - x_1\bar{y}_2 - x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$$

Ali je matrika A v tem skalarnem produktu unitarna, ali je sebi adjungirana, ali je pozitivno definitna?