Poglavje III

Reševanje sistema linearnih enačb

V tem kratkem poglavju bomo obravnavali zelo uporabno in zato pomembno temo linearne algebre — eševanje sistemov linearnih enačb. Spoznali bomo Gaussovo (natančneje Gauss-Jordanovo) metodo za reševanje sistemov linearnih enačb.

1 Matrični zapis

Dan je sistem m linearnih enačb v n neznankah

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{III.1}$$

Pri tem so a_{ij} in b_i, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ dana realna števila, $x_1, x_2, \dots, x_m$ pa so neznanke. Če je $n \leq 3$, potem namesto x_1, x_2, x_3 za neznanke uporabimo raje x, y in z.

Zgled 1.1 Dan je sistem dveh enačb z dvema neznankama

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ x - y &= 5\,. \end{aligned}$$

To je enostaven sistem in ga zlahka rešimo. Če seštejemo obe enačbi, dobimo $2x = 12$. Torej mora biti $x = 6$. Iz prve enačbe potem dobimo $y = 1$. Z vstavljanjem preverimo, da je $x = 6$, $y = 1$ rešitev tega sistema. □

Zgled 1.2 Enostaven primer sistema linearnih enačb je naslednji:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 3 \\ y+2z &= 1 \\ z &= -1\,. \end{aligned}$$

Torej je $z = -1$. Z vstavljanjem v drugo enačbo dobimo, da je $y = 3$. Z vstavljanjem v prvo enačbo pa še $x = -1$. $\square$

Kako rešimo splošen sistem linearnih enačb? Pomagali si bomo z znanjem, ki smo ga dobili o matrikah. Najprej sistem zapišimo v matrični obliki.

Matriko

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

imenujemo *matrika sistema* (III.1) in vektor

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

desna stran. Vektorju

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

rečemo *vektor neznank*. Sistem linearnih enačb (III.1) ima matrični zapis

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{III.2}$$

Iščemo torej tak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki reši enačbo (III.2). Poleg matrike A bomo rabili tudi matriko

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

ki jo imenujemo *razširjena matrika sistema* (III.1).

Izrek 1.3 *Če je $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ obrnljiva matrika, potem imata sistema linearnih enačb*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

in

$$(PA)\mathbf{x} = (P\mathbf{b})$$

enake rešitve.

Dokaz Ker je P obrnljiva matrika, obstaja njen inverz P^{-1}, za katerega velja $P^{-1}P = I = PP^{-1}$. Potem očitno za vsak $\mathbf{x}$, za katerega je $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, velja tudi $(PA)\mathbf{x} = P\mathbf{b}$. Obratno, če $\mathbf{x}$ reši sistem $(PA)\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, potem zanj velja

$$P^{-1}(PA\mathbf{x}) = P^{-1}P\mathbf{b}$$

oziroma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ■

Elementarne transformacije na vrsticah lahko predstavimo tudi z množenjem s tako imenovanimi *elementarnimi matrikami*. Vpeljimo jih:

Za $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ je matrika $E_{ij}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ enaka vsoti identične matrike in matrike, ki ima edini neničeln element na mestu (i, j) enak α. Matrike $E_{ij}(\alpha)$ imenujemo *elementarne matrike tipa I*.

Zgled 1.4 Za $m = 3$ je npr.

$$E_{12}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$E_{31}(6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ □

Za $i = 1, 2, \ldots, m$ in $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, je matrika $E_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ diagonalna matrika, ki ima na diagonali enice povsod razen na i-tem mestu. Element (i, i) je enak α. Matrike $E_i(\alpha)$ imenujemo *elementarne matrike tipa II*.

Zgled 1.5 Za $m = 2$ je $E_1(5) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, za $m = 4$ pa je

$$E_3(\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ □

Za $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$ označimo s P_{ij} matriko, ki jo dobimo iz identične matrike tako, da v i-ti in j-ti vrstici zamenjamo i-ti in j-ti element. Matrike P_{ij} imenujemo *elementarne matrike tipa III*.

Zgled 1.6 Za $m = 3$ imamo tri elementarne matrike tipa III:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Če množimo A z leve z matriko $E_{ij}(\alpha)$, potem produkt $E_{ij}(\alpha)A$ dobimo iz A tako, da i-ti vrstici prištejemo z α pomnoženo j-to vrstico. Množenje z $E_{ij}(\alpha)$ je torej ekvivalentno ustrezni elementarni transformaciji tipa I.

Podobno je množenje matrike A z $E_i(\alpha)$ z leve ekvivalentno elementarni transformaciji tipa II - pomnoži i-to vrstico z α.

Množenje z matriko P_{ij} z leve pa je ekvivalentno elementarni transformaciji tipa III - zamenjaj i-to in j-to vrstico.

Trditev 1.7 *Elementarne matrike tipa I, II in III so obrnljive.*

Dokaz Inverz matrike $E_{ij}(\alpha)$ je matrika $E_{ij}(-\alpha)$. Npr. $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Inverz matrike $E_i(\alpha)$ je $E_i(\alpha^{-1})$.

Za matriko P_{ij} velja $P_{ij}^2 = I$, zato je $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$. ■

2 Gaußova metoda

Izrek 1.3 in trditev 1.7 nam povesta, da množenje sistema linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z leve z elementarnimi matrikami tipa I, II in III ne spremeni rešitve sistema. To dejstvo izkoristimo za iskanje rešitve sistema linearnih enačb pri Gaußovi metodi:

Gaußova metoda **1.)** Zapiši razširjeno matriko sistema:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & | & \mathbf{b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}.$$

2.) Poišči vrstično kanonično formo za $\widetilde{A}$.

3.) Ugotovi, ali je sistem rešljiv in če je, poišči splošno rešitev sistema.

Podrobneje moramo opisati še tretji korak metode. Najprej si oglejmo tri zglede.

Zgled 2.1 Rešimo sistem linearnih enačb $x - y = 7$ in $x + y = 5$. Matrika sistema je $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ in razširjena matrika sistema je

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Poiščimo vrstično kanonično formo za $\widetilde{A}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim_{II} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sistem linearnih enačb, ki pripada zadnji matriki, je $x = 6$, $y = -1$. To pa je že rešitev našega sistema linearnih enačb. $\square$

Zgled 2.2 Rešimo sistem $2y + 3z = 1$, $2x - 6y + 7z = 0$, $x - 2y + 5z = -1$. Razširjena matrika sistema je

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vrstična kanonična forma za $\widetilde{A}$ je:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim_{III} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim_I$$

$$\sim_I \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim_{II} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim_I$$

$$\sim_I \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistem, ki pripada tej matriki, je $x + 8z = 0$, $y + \frac{3}{2}z = 0$ in $0 = 1$. Ta zadnja enačba je protislovna, zato sistem nima rešitve. $\square$

Zgled 2.3 Rešimo še sistem $x + 2y - z = 1$ in $x - y + 2z = 2$. Razširjena matrika sistema je

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vrstična kanonična forma za $\widetilde{A}$ je:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim_{II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \sim_I$$
$$\sim_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Dobljeni sistem je $x + z = \frac{5}{3}$ in $y - z = -\frac{1}{3}$. Tu lahko vrednost spremenljivke z poljubno izberemo. Potem je rešitev enaka $x = \frac{5}{3} - z$ in $y = -\frac{1}{3} + z$. □

Zgornje trije zgledi opišejo v bistvu vse možnosti, ki nastopijo pri reševanju sistema linearnih enačb. Opišimo jih v izreku.

Izrek 2.4 *Dan je sistem linearnih enačb*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{III.3}$$

Naj bo $V(\widetilde{A})$ vrstična kanonična forma za razširjeno matriko sistema $\widetilde{A}$. Sistem (III.3) je rešljiv natanko tedaj, ko v zadnjem stolpcu matrike $V(\widetilde{A})$ ni pivota.

Sistem (III.3) ima natanko eno rešitev natanko tedaj, ko ima $V(\widetilde{A})$ v prvih n stolpcih pivot, v zadnjem stolpcu pa nima pivota.

Če je sistem (III.3) rešljiv, ni pa enolično rešljiv, potem lahko vrednosti spremenljivk, ki pripadajo stolpcem v $V(\widetilde{A})$ brez pivotov, poljubno izberemo. Vrednosti ostalih spremenljivk so potem enolično določene. V tem primeru imamo neskončno rešitev.

Posledica 2.5 *Sistem linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je rešljiv natanko tedaj, ko je $\mathrm{r}(\widetilde{A}) = \mathrm{r}(A)$.*

Opomba 2.6 Če imamo neskončno rešitev sistema linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, potem spremenljivkam, katerih vrednosti lahko v rešitvi poljubno izberemo, rečemo *parametri rešitve*. Če je število parametrov enako k, potem rečemo, da ima sistem *k-parametrično rešitev*. ◊

Sistem linearnih enačb imenujemo *homogen*, če je desna stran enaka $\mathbf{0}$: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Posledica 2.7 *Homogen sistem linearnih enačb ima vedno rešitev $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Če je $m < n$, potem ima homogen sistem neskončno rešitev.*

Zgled 2.8 Rešimo homogen sistem $x+2y-5z=0$ in $-2x-3y+6z=0$. Ker je sistem homogen je desna stran enaka $\mathbf{0}$. Torej je zadnji stolpec pri Gaußovi metodi na razširjeni matriki sitema vseskozi enak $\mathbf{0}$ in ga zato kar izpustimo. Matrika sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Njena vrstična kanonična forma je

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema enačb je zato enaka $x=-3z$ in $y=4z$. Pri tem je z parameter. $\square$

Reševanje sistema linearnih enačb lahko posplošimo tudi na reševanje matričnih enačb oblike

$$AX = B\,.$$

Tu je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, X pa je $n \times k$ matrika neznank. Najpogostejši zgled take enačbe je iskanje inverza matrike. Tedaj je $B = I$ in iščemo tak X, da bo $AX = I$.

Matrično enačbo rešujemo z Gaußovo metodo tako, da poiščemo vrstično kanonično formo za razširjeno matriko

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+k)}\,.$$

Če vrstična kanonična forma V za $\widetilde{A}$ nima pivotov v zadnjih k stolpcih, potem ima enačba $AX = B$ rešitev, sicer pa ne. Spet imamo lahko tudi večparametrično rešitev, če kateri od prvih n stolpcev v V nima pivota.

Zgled 2.9 Poiščimo inverz matrike $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Iščemo torej rešitev matrične enačbe $AX = I$. Razširjena matrika je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njena vrstična kanonična forma je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim_{III} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim_{I}$$
$$\sim_{I} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim_{I} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim_{II}$$
$$\sim_{II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \sim_{I} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Iz vrstične kanonične forme preberemo rešitev

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \qquad \square$$