

20.1. Funkcional $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$ je podan s predpisom

$$f(p) = 6 \int_0^1 p(x) dx.$$

Poišči matriko za f v bazah $\mathcal{B} = \{1, 1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$ za $\mathbb{R}_3[x]$ in $\{1\}$ za \mathbb{R} . Določi $\ker(f)$.

20.2. Vektorski prostor $\mathbb{R}_2[x]$ je opremljen s skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

Funkcional $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ je podan s predpisom

$$f(p) = \int_0^1 xp(x) dx.$$

Poišči polinom $r(x)$ tako da velja

$$f(p) = \langle p, r \rangle \text{ za vsak polinom } p(x).$$

20.3. Prostor \mathbb{R}^2 opremimo s skalarnim produktom

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Naj linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ v standardni bazi pripada matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj

$$\mathcal{A}^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

20.4. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

Naj bo $A : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava dana s predpisom

$$(Ap)(x) = xp'(x) \text{ .}$$

Določi $A^*(x^2 - 1)$.

20.5. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

Naj bo $A : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava dana s predpisom

$$(Ap)(x) = p'(x) \text{ .}$$

Določi $A^*(x^2 - x - 1)$.

20.6. Prostor \mathbb{R}^2 opremimo s skalarnim produktom

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Naj linearni preslikavi $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ v standardni bazi pripada matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko preslikave \mathcal{A}^* v standardni bazi prostora \mathbb{R}^2 .

20.7. V prostoru \mathbb{R}^2 je dan skalarni produkt

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Poišči matriko preslikave \mathcal{A}^* v standardni bazi, če ima preslikava \mathcal{A} v standardni bazi matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitve:

20.1. $f_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 9 & 5 & \frac{7}{2} \end{array} \right], \quad \ker(f) = \mathcal{L}in \left\{ x^2 - \frac{4}{3}x^3, x - 2x^3, 1 - 4x^3 \right\}$

20.2. $-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}$

20.3. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

20.4. 0

20.5. $-6x^2 - \frac{1}{2}x + 4$

20.6. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

20.7. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$